THESE

DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

à L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

PARIS 6

par Brigitte LAMOUROUX

pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences

# PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN FLUIDE BIREFRINGENT

Soutenue le 14 Octobre 1981 devant la commision d'examen

Président M. FRANCON

Examinateurs M. MAY

A. ORSZAG

J. TAVERNIER

F. TEISSIER DU CROS

THESE

DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

à L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

PARIS 6

par Brigitte LAMOUROUX

pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences

# PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN FLUIDE BIREFRINGENT

Soutenue le 1981 devant la commision d'examen

Président M. FRANCON

Examinateurs M. MAY

A. ORSZAG

J. TAVERNIER

F. TEISSIER DU CROS

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tout d'abord, je tiens à remercier Monsieur Orszag, Directeur du laboratoire d'Optique Appliquée, qui m'a fourni les moyens de préparer cette thèse et m'a constamment encouragée dans mon travail.

Monsieur Françon a accepté de parrainer toutes mes recherches puisqu'il était déjà Président du jury lorsque j'ai passé une thèse d'ingénieur docteur, qu'il veuille bien accepter mes sincères remerciements.

Lorsque j'ai commencé à faire de la recherche à l'école Polytechnique, Monsieur Tessier du Cros était Directeur du laboratoire, il m'a accueillie avec une grande gentillesse et a toujours suivi de près les calculs théoriques que j'ai été amenée à faire. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

Les différentes manipulations de faisabilité ont été réalisées avec la collaboration de Monsieur G. Boyer et Monsieur B. Prade, ce dernier de plus, m'a aidée très efficacement lors des calculs de propagation. Qu'ils soient assurés de ma reconnaissance.

Je tiens aussi à remercier Mademoiselle May et Monsieur Tavernier qui ont accepté, de très bonne grâce, de faire partie de mon jury.

Enfin, je ne saurais oublier ce que je dois à Mesdames Vollon et Abrunhosa qui en dehors de leur travail ont bien voulu dactylographier un manuscrit particulièrement ingrat.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547316_0034

# S O M M A I R E


Pages

I. INTRODUCTION..... 1

II. PROPAGATION DU VECTEUR DE STOKES DANS UN GAZ..... 3

II.1 RAPPELS SUR LE VECTEUR DE STOKES ET LA MATRICE DE MUELLER..... 3

II.1.1 LE VECTEUR DE STOKES..... 3
II.1.2 MATRICE DE MUELLER..... 3

II.2 LA BIREFRINGENCE D'ECOULEMENT DANS LES GAZ..... 6

II.2.1 GENERALITES..... 6
II.2.2 RELATION ENTRE LE TENSEUR DIELECTRIQUE $\underline{\underline{\epsilon}}$ ET LE TENSEUR DE POLARISABILITE MOLECULAIRE $\underline{\underline{\alpha}}$..... 7

II.2.2.1 RELATION ENTRE $\underline{\underline{\epsilon}}$ ET L'AXE DE SYMETRIE DE LA MOLECULE..... 7
II.2.2.2 LIAISON ENTRE LE TENSEUR $\overline{\underline{\underline{UU}}}$ ET LE TENSEUR $\overline{\underline{\underline{\nabla r}}}$..... 9
II.2.3 THEORIE CINETIQUE..... 10

II.2.3.1 HYPOTHESE DU ROTATEUR RIGIDE..... 10
II.2.3.2 EVALUATION DU NOMBRE QUANTIQUE j TENSEUR D'ALIGNEMENT..... 12
II.2.3.3 FONCTION DE REPARTITION D'EQUILIBRE.. 13
II.2.3.4 MESURE DE LA BIREFRINGENCE D'ECOULEMENT DANS LES GAZ..... 17
II.2.3.5 CONCLUSION..... 18

II.3 PROPAGATION DANS UN ECOULEMENT GAZEUX LAMINAIRE..... 18

II.3.1 RELATION ENTRE LE TENSEUR DE PERMITTIVITE ET LE GRADIENT DE VITESSE..... 20
II.3.2 EQUATION DE PROPAGATION..... 21
II.3.3 CAS PARTICULIER OU $\underline{k}$, $\underline{v}$ ET $\underline{g}$ SONT PERPENDICULAIRES..... 22
II.3.4 CALCUL DES TERMES DE LA MATRICE DE JONES DU MILIEU..... 24
II.3.5 CAS PARTICULIER : BIREFRINGENCE D'ECOULEMENT DE L'AIR..... 27

Pages

II.4 ETUDE EXPERIMENTALE EN SOUFFLERIE..... 35

II.4.1 PROFIL EXPERIMENTAL ET THEORIQUE DE LA VITESSE ET DE SES DERIVEES DANS LA COUCHE LIMITE..... 35
II.4.2 DESCRIPTION DU MONTAGE..... 39

II.5 CONCLUSION..... 43

III. DIFFUSION D'UNE ONDE PLANE MONOCHROMATIQUE..... 44

III.1 DIFFUSION D'UNE ONDE PLANE PAR UN FLUIDE EN MOUVEMENT.. 44

III.1.1 EXPRESSION DU VECTEUR DE STOKES..... 44
III.1.2 CAS PARTICULIER DE LA DIFFUSION A 90°..... 52

III.2 DIFFUSION D'UNE ONDE PLANE PAR DES FLUCTUATIONS ISOTROPES DE n..... 54

III.2.1 EQUATION DU PROBLEME..... 54
III.2.2 CAS PARTICULIER DE LA DIFFUSION A 90°..... 57

III.3 CONCLUSION..... 59

IV. METHODE UTILISEE EN POLARIMETRIE BIDIMENSIONNELLE,..... 60

IV.1 INTRODUCTION..... 60
IV.2 MESURE RAPIDE DES COMPOSANTES DU VECTEUR DE STOKES..... 62
IV.3 MONTAGE EXPERIMENTAL..... 68
IV.4 FILTRAGE..... 68
IV.5 PRECISION..... 69
IV.6 PUISSANCE EQUIVALENTE AU BRUIT..... 70
IV.7 CONCLUSION..... 71

V. METHODE UTILISEE EN POLARIMETRIE TRIDIMENSIONNELLE..... 73

V.1 INTRODUCTION..... 73
V.2 RELATION ENTRE L'INTENSITE MESUREE ET LA MATRICE DE MUELLER DU MILIEU..... 73
V.3 PRINCIPE DE MESURE..... 75
V.4 PRECISION..... 76

VI. MESURE D'UN GRADIENT DE VITESSE PONCTUEL A L'INTERIEUR D'UN FLUIDE..... 77

VI.1 INTRODUCTION..... 77
VI.2 THEORIES DE LA BIREFRINGENCE D'ECOULEMENT DANS LES LIQUIDES..... 77

Pages


VI.2.1 HISTORIQUE..... 77
VI.2.2 THEORIE DE HALLER..... 78
VI.2.3 THEORIE DE BOEDER..... 80
VI.2.4 THEORIE DE KUHN..... 82

VI.2.4.1 PARTICULE ELLIPTIQUE - RAPPORT AXIAL. FAIBLE..... 82
VI.2.4.2 PARTICULE ELLIPTIQUE - RAPPORT AXIAL. ELEVE..... 83

VI.2.5 THEORIE DE SADRON..... 83
VI.2.6 THEORIE DE PETERLIN-STUART ET DE SNELLMAN-BJORNSTAL..... 84
VI.2.7 REMARQUES..... 92

VI.3 FLUIDES NEWTONIENS ET NON NEWTONIENS..... 92

VI.3.1 FLUIDE NEWTONIEN..... 93
VI.3.2 FLUIDE NON NEWTONIEN..... 93
VI.3.3 FLUIDE OSTWALDIEN..... 93
VI.3.4 REMARQUES..... 94

VI.4 PROPAGATION D'UNE ONDE POLARISEE A L'INTERIEUR D'UN FLUIDE BIREFRINGENT EN MOUVEMENT..... 94

- CAS D'UN LIQUIDE PRESENTANT DU DICHROISME D'ECOULEMENT..... 97

VI.5 ECOULEMENT DANS UN CYLINDRE DE COUETTE..... 99

VI.5.1 INTRODUCTION..... 99
VI.5.2 LIAISONS ENTRE LES COMPOSANTES DU GRADIENT DE VITESSE EN COORDONNEES CARTESIENNES ET CYLINDRIQUES..... 100
VI.5.3 CAS PARTICULIERS..... 101

VI.5.3.1 ECOULEMENT LAMINAIRE CLASSIQUE..... 101
VI.5.3.2 ECOULEMENT LAMINAIRE EN PRESENCE DES ROULEAUX DE TAYLOR..... 101
VI.5.3.3 CONCLUSION..... 108

VI.6 MONTAGE EXPERIMENTAL..... 110

VI.6.1 LE CYLINDRE DE COUETTE..... 110
VI.6.2 LE LIQUIDE BIREFRINGENT..... 112

VI.6.2.1 INTRODUCTION..... 112
VI.6.2.2 FABRICATION DE LA SOLUTION AQUEUSE... 113
VI.6.2.3 COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DE LA SOLUTION..... 113

VI.6.3 REALISATION PRATIQUE..... 116

Pages

VI.7 RESULTATS EXPERIMENTAUX..... 121

VI.7.1 ETUDE DE LA LUMIERE TRANSMISE..... 121
VI.7.2 ETUDE DE LA LUMIERE DIFFUSEE..... 122

VI.7.2.1 CALCUL PRATIQUE DES DIFFERENTES MATRICES..... 122
VI.7.2.2 ETALONNAGE..... 125
VI.7.2.3 RESULTATS OBTENUS LORS D'UN ECOULEMENT LAMINAIRE..... 127
VI.7.2.4 RESULTATS OBTENUS EN PRESENCE DES ROULEAUX DE TAYLOR..... 128

VI.8 CONCLUSION..... 132

VII. CONCLUSION GENERALE..... 133

ANNEXE 1.....A.1-1 à A.1-4
ANNEXE 2.....A.2-1 à A.2-6
ANNEXE 3.....A.3-1 à A.3-4
BIBLIOGRAPHIE.....B.1 à B.4

## INTRODUCTION

L'apparition du laser a ouvert de nombreuses perspectives aux communications optiques.

Le signal optique est souvent modulé en amplitude. Cependant, la source laser produit aisément de la lumière polarisée et la forme de lumière (circulaire, rectiligne, elliptique) peut également être modulée. Par exemple, on modifie la direction de la polarisation rectiligne, ou bien, on renverse le sens de la polarisation circulaire etc...

On sait cependant que la liaison optique dans l'atmosphère est affectée par :

- l'absorption, particulièrement intense en cas de brouillard, neige etc...

- la turbulence, responsable des phénomènes de scintillation, qui fait fluctuer l'intensité de l'onde, sa direction de propagation, et altère ses propriétés de cohérence.

De nombreuses expériences ont été effectuées sur la scintillation de l'intensité de l'onde lumineuse. Les observations relatives aux changements de la polarisation sont moins nombreuses, mais elles ont permis d'établir que l'état de polarisation est moins perturbé que l'intensité.

Nous avons calculé les pertes d'information d'une liaison par un faisceau lumineux qui se propage à travers une atmosphère non absorbante mais turbulente. Nous supposons que le processus de détection suit une loi de Poisson [1], que les fluctuations d'intensité suivent une loi log-normale [2], que la dépolarisation de la lumière est négligeable [3] et [4], que les polariseurs sont parfaits ce qui entraîne un bruit indépendant du signal, hypothèse justifiable dans les cas pratiques envisagés (Cf. annexe I).

Pour conclure cette étude, nous avons comparé la capacité d'une ligne optique modulée en polarisation et celle d'une ligne modulée en intensité pour différentes valeurs de la variance des fluctuations du logarithme de l'amplitude du signal lumineux. Pour un débit d'information donné, nous avons toujours trouvé une capacité supérieure pour le processus de modulation de polarisation.

Les résultats de cette étude qui concernait la traversée d'un milieu inhomogène mais isotrope nous ont conduit à nous intéresser à un milieu anisotrope, siège par exemple de gradients de vitesse et de température et à calculer le vecteur de Stokes d'une lumière traversant un tel milieu ou diffusée par lui.

Une étude expérimentale en basse atmosphère ayant montré l'existence d'une corrélation entre les fluctuations de la biréfringence d'un milieu et les fluctuations du gradient de vent [5], la connaissance de la liaison entre le vecteur de Stokes et les gradients de vitesse siègeant dans le milieu étudié devrait permettre de relier la mesure du vecteur de Stokes aux grandeurs caractérisant le fluide en mouvement.

# II. PROPAGATION DU VECTEUR DE STOKES DANS UN GAZ

## II.1 RAPPELS SUR LE VECTEUR DE STOKES ET LA MATRICE DE MUELLER

### II.1.1 LE VECTEUR DE STOKES

Une onde transversale est définie par les deux composantes du champ électrique : $E_X$ et $E_Z$

Les composantes du vecteur de Stokes I M C S [6] permettent de définir entièrement l'intensité et la polarisation de la lumière considérée, ce sont des moyennes dans le temps définies parfois de manières légèrement différentes, nous adopterons les conventions suivantes :

$$I = \langle E_X E_X^* \rangle + \langle E_Z E_Z^* \rangle$$

$$M = \langle E_X E_X^* \rangle - \langle E_Z E_Z^* \rangle$$

$$C = \langle E_X E_Z^* \rangle + \langle E_X^* E_Z \rangle$$

$$S = i( \langle E_X E_Z^* \rangle - \langle E_X^* E_Z \rangle )$$

Le signe * signifiant conjugué.
On peut démontrer l'inégalité : $M^2 + C^2 + S^2 \leqslant I^2$,
l'égalité n'ayant lieu que pour une lumière totalement polarisée

On appelle taux de polarisation P la quantité définie par,

$$P = \frac{\sqrt{M^2 + C^2 + S^2}}{I}$$

Le vecteur de Stokes, outre l'avantage de représenter totalement l'état de polarisation permet de simplifier la formulation et la résolution de problèmes polarimétriques à l'aide du formalisme de MUELLER.

### II.1.2 MATRICE DE MUELLER

Soit $\underline{E}$ et $\underline{E}'$ les champs électriques respectivement à l'entrée et à la sortie du milieu optique considéré.
La linéarité des équations de MAXWELL entraîne l'existence d'une matrice complexe, appelée matrice de JONES [ 7] telle que

$$(O)\quad \underline{E}' = \hat{J}\, \underline{E}$$

D'autre part, on définit la matrice cohérence $\hat{F}$ [8] de la manière suivante

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} \langle E_x\ E_x^* \rangle & \langle E_x\ E_z^* \rangle \\ \langle E_x^*\ E_z \rangle & \langle E_z\ E_z^* \rangle \end{pmatrix}$$

Après traversée d'un milieu optique, la matrice $\hat{F}$ devient la matrice $\hat{F}'$ telle que :

$$\hat{F}' = \hat{J}\ \hat{F}\ \hat{J}^*$$

Le vecteur de Stokes émergeant $\underline{V}'$ se déduit donc du vecteur de Stokes incident : $\underline{V}$ par la relation [9]

$$\underline{V}' = \hat{M}\underline{V}$$

$\hat{M}$ est une matrice 4x4, réelle, que l'on appelle la matrice de MUELLER.

La matrice de MUELLER d'un biréfringent non linéaire, non absorbant a la forme suivante (voir Annexe II) :

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^2-E^2-F^2+G^2 & 2\,(DE+FG) & 2(DF-EG) \\ 0 & 2(DE-FG) & -D^2+E^2-F^2+G^2 & 2(DG+EF) \\ 0 & 2(DF+EG) & -2(DG-EF) & -D^2-E^2+F^2+G^2 \end{pmatrix}$$

avec :

$$D = \cos 2\theta\ \sin \delta/2\ \cos 2\alpha$$
$$E = \sin 2\theta\ \sin \delta/2\ \cos 2\alpha$$
$$F = \sin 2\alpha\ \sin \delta/2$$
$$G = \cos \delta/2$$

$\delta$ représentant le retard introduit par le biréfringent
$\theta$ l'azimuth de l'axe rapide par rapport à la direction de référence
$\alpha$ le site de l'axe rapide par rapport à la direction de référence ; la lumière étant dite droite si $2\alpha$ est positif, gauche dans le cas contraire.

Dans le cas d'un biréfringent linéaire non absorbant $\alpha = 0$ ce qui entraine :

$$D = \cos 2\theta \sin \delta/2$$
$$E = \sin 2\theta \sin \delta/2$$
$$F = 0$$
$$G = \cos \delta/2$$

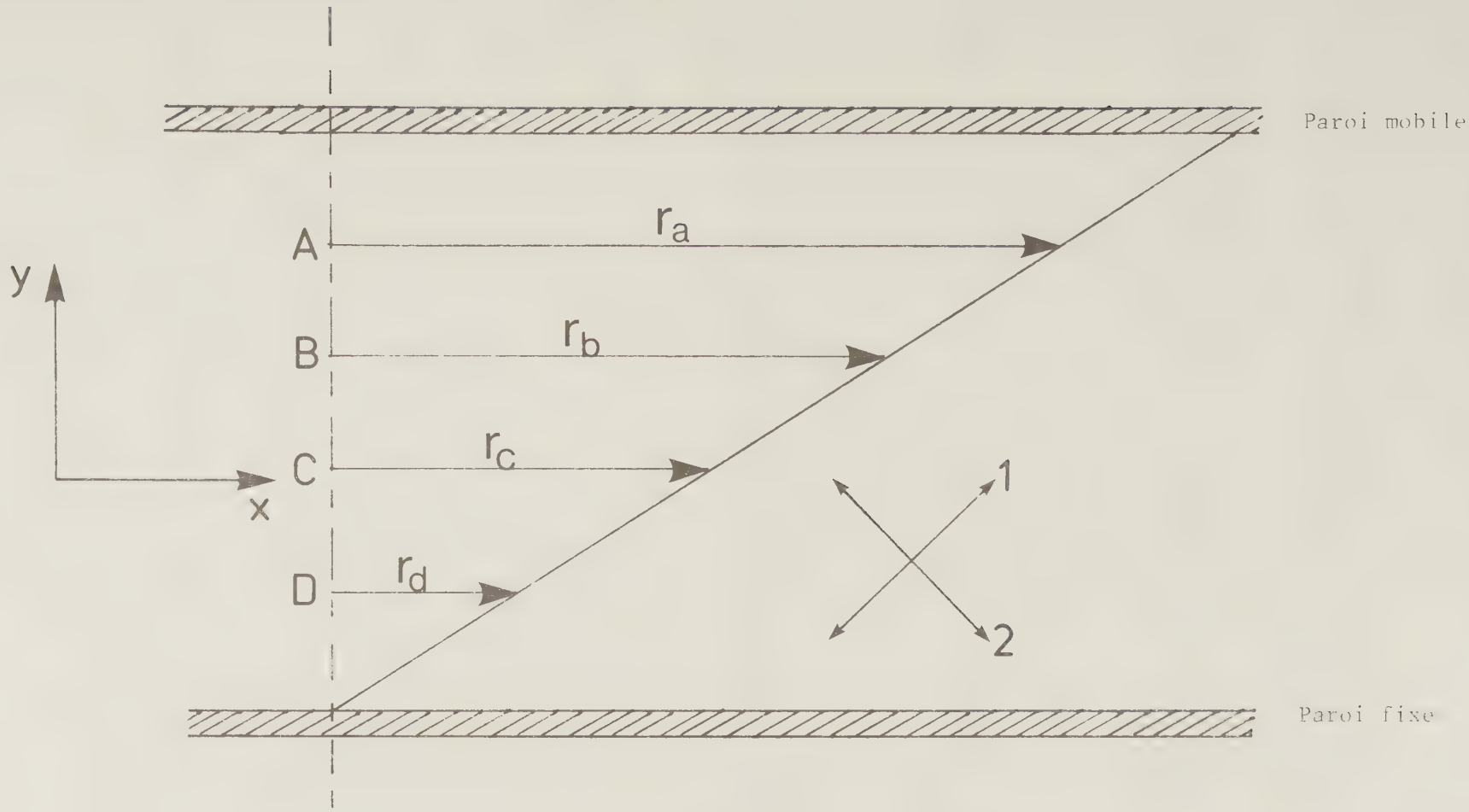



Fig n°1 : Profil des vitesses à l'intérieur d'un écoulement de Poiseuille plan

## II.2 LA BIREFRINGENCE D'ECOULEMENT DANS LES GAZ [11]

### II.2.1 GENERALITES

La biréfringence d'écoulement a été étudiée par MAXWELL [12] dès 1873. Pour en discerner l'origine, il suffit de décomposer la relation fondamentale de l'électrostatique

$$\underline{D} = \underline{\underline{\epsilon}}\ \underline{E} \tag{1}$$

$\underline{D}$ étant le vecteur induction électrique, $\underline{E}$ le vecteur champ électrique, $\underline{\underline{\epsilon}}$ le tenseur de polarisabilité du milieu.

On peut décomposer $\underline{\underline{\epsilon}}$ en une partie isotrope, scalaire $\epsilon$ et une partie anisotrope $\overline{\underline{\underline{\epsilon}}}$ ce qui permet d'écrire la relation (1) sous la forme

$$\underline{D} = \epsilon\ \underline{E} + \overline{\underline{\underline{\epsilon}}}\ \underline{E}$$

L'anisotropie de l'indice de réfraction du gaz est due à l'existence de $\overline{\underline{\underline{\epsilon}}}$ . Dans un fluide visqueux, la répartition des contraintes en fonction du gradient de vitesse est donnée par la loi de NEWTON.

$$\underline{\underline{\mathcal{T}}} = -2\,\xi\ \overline{\underline{\underline{\nabla r}}} \tag{2}$$

$\underline{\underline{\mathcal{T}}}$ étant un tenseur symétrique à trace nulle le coefficient $\xi$ est un scalaire et r représente la vitesse macroscopique.
Par analogie, on écrit :

$$\overline{\underline{\underline{\epsilon}}} = -2\beta\ \overline{\underline{\underline{\nabla r}}} \tag{3}$$

Le coefficient $\beta$ est un scalaire. En présence d'un champ magnétique, $\xi$ et $\beta$ seraient des tenseurs d'ordre quatre.
L'étude de l'action d'un champ magnétique sur la répartition des contraintes de viscosité a été faite par H. Senftleben [13] et J.J.M Beenakker [14].
Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille [15] plan, visualisé sur la figure n°1 avec un gradient de vitesse uniforme, les lignes de courant sont parallèles à $\overrightarrow{Ox}$.

1 et 2 sont deux des axes principaux du tenseur $\overline{\underline{\underline{\nabla r}}}$, ils sont orthogonaux et à 45° de la paroi, le troisième axe principal est la direction $\overrightarrow{Oz}$. Le tenseur $\overline{\underline{\underline{\epsilon}}}$ et le tenseur des indices ont les mêmes axes principaux.
Soit $n_1$ et $n_2$ les indices principaux suivant 1 et 2 :

$$n_1 - n_2 = \beta \frac{\partial r_x}{\partial y}$$

## II.2.2 RELATION ENTRE LE TENSEUR DIELECTRIQUE $\underline{\underline{\epsilon}}$ ET LE TENSEUR DE POLARISABILITE MOLECULAIRE $\underline{\underline{\alpha}}$

### II.2.2.1 RELATION ENTRE $\underline{\underline{\epsilon}}$ ET L'AXE DE SYMETRIE DE LA MOLECULE

Pour une molécule placée dans un champ électrique $\underline{E}$, le vecteur polarisation électrique $\underline{P}$ vaut :

$$\underline{P} = \underline{\underline{\alpha}}\ \underline{E}$$

$\underline{\underline{\alpha}}$ étant le tenseur de polarisabilité et

$$\underline{D} = \underline{E} + 4\pi \underline{P}$$

Nous n'envisageons que le cas où la molécule est linéaire, les valeurs principales de $\underline{\underline{\alpha}}$ sont $\alpha_{/\!/}$ et $\alpha_{\perp}$ (parallèle et perpendiculaire à l'axe de la molécule).

Dans un gaz de molécules identiques au nombre moyen de $\nu$ par unité de volume, il existe la relation suivante entre le tenseur de polarisabilité et le tenseur diélectrique du milieu :

(4) $\quad \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\delta}} + 4\pi\nu\langle\underline{\underline{\alpha}}\rangle$ relation à l'échelle macroscopique

$\underline{\underline{\delta}}$ est le tenseur unité, le second terme est la moyenne des tenseurs $\underline{\underline{\alpha}}$ attachés aux molécules présentes dans l'unité de volume. Cette expression découle de l'additivité des vecteurs $\underline{P}$ des molécules.
Le tenseur moyen $\langle\underline{\underline{\alpha}}\rangle$ et par suite $\underline{\underline{\epsilon}}$ dépendront de la corrélation qui peut exister entre les directions des axes des molécules.

La relation (2) s'applique bien aux gaz dans l'intervalle de pressions de $10^{-3}$ atm à 100 atm. Aux pressions plus basses, le libre parcours devenant comparable à la longueur d'onde, la notion de constante diélectrique locale n'est plus applicable. Aux pressions plus fortes, la polarisation électrique cesse d'être proportionnelle à $\nu\langle\underline{\underline{\alpha}}\rangle$.

On peut décomposer (4) de la façon suivante

$$\underline{\underline{\epsilon}} = (1 + 4\pi\nu\alpha)\underline{\underline{\delta}} + 4\pi\nu\langle\overline{\underline{\underline{\alpha}}}\rangle \quad \text{d'où} \quad \overline{\underline{\underline{\epsilon}}} = 4\pi\nu\langle\overline{\underline{\underline{\alpha}}}\rangle$$

$\alpha$ est la polarisabilité moyenne elle est égale à $\frac{1}{3}\alpha_{/\!/} + \frac{2}{3}\alpha_{\perp}$

Le tenseur $\langle\overline{\underline{\underline{\alpha}}}\rangle$, symétrique et de trace nulle, est appelé <u>tenseur de polarisation</u>.

Fig n° 12 : Ecoulement de Poiseuille plan

s,p,c,d représentent chacun orientations de la molécule avant collision

Soit $\underline{u}$ le vecteur unitaire porté par l'axe de symétrie de la molécule, et $\overline{\overline{uu}}$ le tenseur déviation correspondant, dont la coordonnée $\lambda\mu$ vaut :

$$(5) \qquad (\overline{\overline{uu}})_{\lambda\mu} = u_\lambda u_\mu - \frac{1}{3}\delta_{\lambda\mu}\sum_\alpha u_\alpha u_\alpha$$

Le rattachement des vecteurs $\underline{E}$ et $\underline{P}$ aux axes d'inertie permet d'établir que les deux tenseurs sont liés par :

$$(6) \qquad \overline{\overline{\alpha}} = (\alpha_{/\!/} - \alpha_\perp)\,\overline{\underline{u}\,\underline{u}}$$

On peut avec une bonne approximation assimiler la molécule à un <u>rotateur rigide</u> (absence de déformation par les forces d'inertie) les polarisabilités $\alpha_{/\!/}$ et $\alpha_\perp$ ont alors les mêmes valeurs dans toutes les molécules ; on déduit alors de (4) et (6) que la déviation du tenseur diélectrique vaut :

$$(7) \qquad \overline{\overline{\epsilon}} = 4\pi\nu(\alpha_{/\!/} - \alpha_\perp) < \overline{\underline{u}\,\underline{u}} >$$

Dans un gaz à l'équilibre, $< \overline{\overline{uu}} >$ a ses coordonnées nulles. Cela résulte de l'expression (5), quand les directions de $\underline{u}$ se trouvent uniformément réparties sur une sphère. L'écoulement du gaz est une rupture d'équilibre, qui confère au tenseur $\overline{\overline{uu}}$ une valeur liée à $\overline{\overline{\nabla r}}$ .

### II.2.2.2 LIAISON ENTRE LE TENSEUR $\overline{\overline{uu}}$ ET LE TENSEUR $\overline{\overline{\nabla r}}$

On peut envisager un modèle de collision qui, en réalité s'applique mieux à un liquide qu'à un gaz ; les molécules ayant une faible vitesse de rotation, on peut réellement parler d'une orientation de l'axe moléculaire juste avant et juste après un choc.
Reprenons le cas de l'écoulement de Poiseuille plan, représenté sur la figure N°2.

On ne considère que quatre orientations des molécules (celles où l'axe est parallèle à $\vec{Ox}$, à $\vec{Oy}$ ou à une des deux bissectrices). Les molécules venant de la gauche heurtent un obstacle C. Celles qui avaient initialement les orientations parallèles à x ou y ne changent pas d'orientation, en raison de la symétrie. Quand une molécule de type d a heurté C, elle rebondit vers le haut ; une molécule orientée de type c rebondit vers le bas.

La partie médiane comporte donc des molécules de type d provenant de la partie inférieure (basses vitesses) et des molécules de type c provenant de la partie supérieure (hautes vitesses) donc en plus grand nombre ce qui provoque l'anisotropie. L'utilisation d'une théorie cinétique, mieux adaptée au cas d'un gaz va permettre de montrer que $\overline{\overline{uu}}$ est proportionnel à $\overline{\overline{\nabla r}}$ et à l : libre parcours moyen d'une molécule.

### II.2.3 THEORIE CINETIQUE

Il est possible de justifier la relation (3)

$$\overline{\overline{\epsilon}} = -2\beta\,\overline{\overline{\nabla r}}$$

et de calculer la valeur théorique de $\beta$ . Jusqu'à une pression de 100 atm, il n'existe aucune corrélation entre les directions des axes de ces molécules avant et après un choc, par contre les directions des moments cinétiques sont reliées.

#### II.2.3.1 HYPOTHESE DU ROTATEUR RIGIDE

Nous nous limiterons au cas des molécules linéaires.
La molécule libre se comporte comme un rotateur oscillant dont le moment et l'énergie cinétique dépendent du nombre quantique j, du nombre magnétique m et des nombres quantiques de vibration. Dans les conditions ordinaires, les molécules restent en grande majorité au niveau fondamental de vibration, le couplage vibration-rotation étant peu important, on néglige le role des vibrations et l'on considére la molécule comme un rotateur rigide.

Les opérateurs du moment cinétique sont $\hbar J_\mu$ avec $\mu$ = x, y ou z. $|jm>$ représentant la fonction d'onde, on a les relations :

$J_z \quad |jm> = m\,|jm>$ et

$J^2 \quad |jm> = j\,(j+1)\,|jm>$

On utilise l'opérateur tensoriel $\overline{\overline{JJ}}$ tel que

$$(\overline{\overline{JJ}}_{\zeta\mu}) = \frac{1}{2}\,(J_\mu J_\zeta + J_\zeta J_\mu) - \frac{1}{3}\,J^2\,\delta_{\mu\zeta}$$

C'est un opérateur hermitien, symétrique en $\mu$ et $\zeta$ de trace nulle. L'état du gaz, hors équilibre thermodynamique, est caractérisé par une fonction de répartition f, à proprement parler un opérateur de répartition dont les éléments matriciels dépendent du temps, de la position et de l'impulsion d'une molécule.

On peut décomposer l'opérateur f en une partie diagonale par rapport à j et une partie non diagonale :

$$f(t, x, v) = f(t, x, v, J) + \sum_{j \neq j'} \sum f^{jj'}(t, x, v)$$

La valeur moyenne d'un opérateur $\Phi(v)$ quelconque, donc les éléments de matrice sont de la forme

$< jm \mid \Phi \mid j'm' >$, peut s'écrire :

$$< \Phi > = < \Phi (v, J) > + \sum_{j \neq j'} \sum < \Phi^{jj'}(v) >$$

avec : $$< \Phi (v, J) > = \frac{1}{n} \mathrm{Tr} \int \Phi (v, J) f(t, x, v, J) d^3 v$$

et $$< \Phi^{jj'} (v) > = \frac{1}{n} \mathrm{Tr} \int d^3 v \, \Phi^{jj'}(v) f^{j'j}(t, x, v) \qquad [64]$$

n, la densité des particules ayant la forme ci-dessous

$$n(x, t) = \mathrm{Tr} \int d^3 v \, f(t, x, v) = \mathrm{Tr} \int d^3 v \, f(t, x, v, J)$$

Tr signifie la trace sur les nombres quantiques magnétiques et la sommation sur j.

Pour une molécule linéaire, $\underline{J}$ l'opérateur vectoriel du moment angulaire est orthogonal à l'axe de la molécule donc

$$\underline{J} . \underline{u} = o$$

L'opérateur $\overline{\underline{\underline{uu}}}$ qui intervient dans les relations (6) et (7) contient une partie $\overline{\underline{\underline{uu}}}(J)$ qui est diagonale par rapport au nombre quantique de rotation et une partie qui est non diagonale pour $j' - j = \pm 2$.

$$< \overline{\underline{\underline{uu}}} > = < \overline{\underline{\underline{uu}}} (J) > + \sum_{j=o}^{\infty} \left\{ < \overline{\underline{\underline{uu}}}\, j, j+2 > + < \overline{\underline{\underline{uu}}}\, j+2, j > \right\}$$

Pour un ensemble de molécules libres (par exemple, dans le cas d'un gaz très dilué) $< \overline{\underline{\underline{uu}}} (J) >$ est constant dans le temps et les termes non diagonaux de l'équation ci-dessus sont des termes rapidement variables dans le temps, responsables de la diffusion Raman de rotation.

Nous ne nous intéresserons qu'au terme $< \overline{\underline{\underline{uu}}} (J) >$ car c'est le seul terme important pour la biréfringence (ce terme intervient également dans le processus de diffusion Rayleigh dépolarisée).

En remarquant que $\langle \overline{\underline{\underline{uu}}} \rangle$ (J) est proportionnel à $\langle \overline{\underline{\underline{JJ}}} \rangle$ et en utilisant la relation $\underline{J}.\underline{u} = o$, on obtient la relation suivante [63] :

$$(8) \qquad \overline{\underline{\underline{uu}}}\,(J) = -\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\underline{\underline{JJ}}}}{J^2-3/4}$$

en fait, il s'avère utile d'utiliser le tenseur de second rang

$$\underline{\underline{\varphi}} = \sqrt{\frac{15}{2}}\ \left(\left\langle \frac{J^2}{J^2-3/4} \right\rangle^{\circ}\right)^{-1/2}\ (J^2-3/4)^{-1}\ \overline{\underline{\underline{JJ}}}$$

au lieu de $\overline{\underline{\underline{JJ}}}$ . De manière à réaliser la normalisation [65], $\underline{\underline{\varphi}}$ a été choisi de telle sorte que :

$$\mathrm{Tr} \int \frac{f_o}{\nu_o}\, d^3v \sum_{\mu\nu} (\varphi_{\mu\nu})^2 = 5$$

La quantité $(\underline{\underline{\alpha}}-\alpha_1)$ peut être considérée comme approximativement indépendante de l'état de rotation de la molécule.

Compte tenu de l'approximation $\langle \overline{\underline{\underline{uu}}} \rangle \underline{\sim} \langle \overline{\underline{\underline{uu}}}(J) \rangle$ $\overline{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ est donc proportionnelle à $\langle \overline{\underline{\underline{JJ}}} \rangle$ .

II.2.3.2. EVALUATION DU NOMBRE QUANTIQUE j. TENSEUR D'ALIGNEMENT.

Dans l'air, près de l'équilibre,la majorité des molécules ont un mouvement de rotation. L'ordre de grandeur du nombre j moyen dans l'air près de l'équilibre, à une température T, s'obtient en égalant à $K_B T$ l'énergie cinétique de rotation d'une molécule d'où :

$$j\,(j+1)\,\hbar^2 \underline{\sim} 2\,\theta\,K_B\,T$$

$\theta$ étant le moment d'inertie de rotation pour l'air

$$\hbar^2 \sim 1{,}1 \quad 10^{-68} \text{ MKSA}$$

$$2\,\theta \sim 5 \quad 10^{-47} \text{ MKSA}$$

$$K_B T \sim 4 \quad 10^{-21} \text{ MKSA à la température ambiante}$$

d'où : $j \sim 4$

On peut donc remplacer le dénominateur de la formule (8) par $J^2/\lambda$ ce qui simplifie le second membre de la relation (7).

On introduit le tenseur d'alignement $\underline{\underline{a}}$, symétrique et de trace nulle tel que :

$$\underline{\underline{a}} = < \underline{\underline{\varphi}} >$$

il est nul à l'équilibre thermique.

La relation (7) peut s'écrire :

$$< \underline{\underline{\varepsilon}} > = - 2 \pi \nu \sqrt{\frac{2}{15}} (\alpha_{/\!/} - \alpha_{\perp}) (< \frac{J^2}{J^2 - \frac{3}{4}} >_o)^{1/2} \underline{\underline{a}}$$

## II.2.3.3. FONCTION DE REPARTITION D'EQUILIBRE

Une molécule assimilée à un rotateur rigide de vitesse v, de masse M, de moment cinétique total J possède une énergie cinétique :

$$W(v, j) = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{\hbar^2}{2\theta} J^2$$

$\theta$ étant le moment d'inertie du rotateur, $\frac{\hbar^2}{2\theta} J^2$ est l'énergie de rotation d'une molécule linéaire.

A l'équilibre thermique, la fonction de répartition s'écrit :

$$f_o(v, J) = \nu_o (2 \pi M K_B T)^{-3/2} Q_o^{-1} \exp\left(- \frac{W(v, J)}{K_B T}\right)$$

$\nu_o$ : concentration volumique à l'équilibre.

$K_B$: constante de Boltzmann.

$$Q_o : \sum_j (2j + 1) \exp - \frac{j(j + 1) \hbar^2}{2\theta K_B T}$$

Hors équilibre Waldmann [16] [17] et R.F Snider [18] ont adopté la fonction de répartition suivante dans un écoulement gazeux.

$$f(t, x, v, J) = f_o(v, J) [1 + \Phi(t, x, v, J)]$$

$\Phi$ représente un petit écart relatif à la fonction d'équilibre, c'est un opérateur diagonal en j qui satisfait à l'équation de Waldmann-Snider

$$(9) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \underline{v} . \underline{\nabla} \Phi + \omega(\Phi) = 0$$

le dernier terme représente la variation de $\Phi$ causée par les collisions survenant à l'intérieur du volume unité. $\omega$ est un opérateur linéaire semi-défini-positif. Son expression dépend de la loi de diffusion moléculaire et notamment du potentiel d'interaction relatif à une paire de molécules [65][66].

Des modèles de potentiel bimoléculaire ont été imaginés puis vérifiés par des expériences de collisions entre jets moléculaires dans le vide.

Pour résoudre l'équation (9) on adopte un développement linéaire de $\Phi$ en fonction de facteurs $\psi_\nu$ qui peuvent être scalaires, vectoriels ou tensoriels:

$$\Phi = \sum_\nu \alpha_\nu \psi_\nu (v,J) \text{ avec } \alpha_\nu = < \psi_\nu > \text{ [65].}$$

les différents facteurs $\psi_n$ étant indépendants, la valeur moyenne de chaque coordonnée d'un $\psi_n$ est nulle à l'équilibre et la moyenne du produit de deux coordonnées est nulle sauf s'il s'agit du carré d'une coordonnée.

Dans un écoulement gazeux isotherme, les différents facteurs indépendants sont : la vitesse individuelle $\underline{v}$ de la molécule, le tenseur de déviation $\overline{\overline{vv}}$ et l'anisotropie du moment cinétique déterminée par le tenseur : $\frac{\overline{\overline{JJ}}}{J^2}$

$$\text{d'où} \quad \Phi \sim \frac{m}{K_B T} \underline{r}.\underline{v} + \frac{m}{\nu_o (K_B T)^2} \overline{\overline{p}}.\overline{\overline{vv}} + \underline{\underline{a}}.\left(\frac{1}{J^2}\overline{\overline{JJ}}\right)$$

en désignant par $\underline{r}$, $\overline{\overline{p}}$, $\underline{\underline{a}}$ les valeurs moyennes des grandeurs moléculaires $\underline{v}$, $\overline{\overline{vv}}$ et $\frac{1}{J^2}\overline{\overline{JJ}}$ ( $\underline{r}$ est la vitesse macroscopique, $\overline{\overline{p}}$ le tenseur des frictions de viscosité); m est la masse d'une molécule.

Comme pour les gaz de molécules linéaires, la partie $< \overline{\overline{\varepsilon}} >$ qui détermine la biréfringence est reliée à la polarisation tensorielle $\underline{\underline{a}}$ par une relation linéaire, il faut étudier le couplage entre le tenseur de friction $\overline{\overline{p}}$ et la polarisation tensorielle $\underline{\underline{a}}$ afin de justifier la relation (3) :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = -2\beta \overline{\overline{\nabla r}}$$

Après report du développement de $\Phi$ dans l'équation (9), multiplication successive par $\underline{v}$, $\overline{\overline{vv}}$ ou $\overline{\overline{JJ}}$, prise de moyenne sur l'état $f_o$, on parvient à un système d'équations différentielles du 1er ordre.

Les moyennnes :

$$\frac{1}{5}<\frac{1}{J^2}\overline{JJ}_{\alpha\beta}\cdot\omega(\frac{1}{J^2}\overline{JJ}_{\alpha\beta})>_o=\omega_T$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}}<\frac{1}{J^2}\overline{JJ}_{\alpha\beta}\cdot\omega(v_\alpha v_\beta)>_o=\omega_{\eta T}$$

$$\frac{2}{5}<v_\alpha v_\beta\cdot\omega(v_\alpha v_\beta)>_o=\omega_\eta$$

sont appelées coefficients de relaxation,$<\ >_o$ signifie une moyenne prise dans l'état d'équilibre décrit par $f_o$ soit $p_o = \nu_o K_B T$ la pression du gaz à l'équilibre chacun des $\omega$ ci-dessus étant proportionnel à $p_o$, leur rapport en est donc indépendant.

Pour $\overline{\underline{\underline{p}}}$ et $\underline{\underline{a}}$, on obtient, en négligeant le courant de polarisation :

$$\frac{\partial\overline{\underline{\underline{p}}}}{\partial t}+2p_o\overline{\underline{\underline{\nabla r}}}+\omega_\eta\overline{\underline{\underline{p}}}+\sqrt{2}p_o\omega_{\eta T}\underline{\underline{a}}=0$$

et $$\frac{\partial\underline{\underline{a}}}{\partial t}+\omega_{\eta T}\frac{1}{\sqrt{2}p_o}\overline{\underline{\underline{p}}}+\omega_T\underline{\underline{a}}=0$$

Pour un traitement d'un écoulement stationnaire on peut négliger les dérivées temporelles et l'on trouve les solutions suivantes pour $\overline{\underline{\underline{p}}}$ et $\underline{\underline{a}}$ :

$$\overline{\underline{\underline{p}}}=-2(\omega_\eta-\frac{\omega^2_{\eta T}}{\omega_T})^{-1}p_o\overline{\underline{\underline{\nabla r}}}$$

et $$\underline{\underline{a}}=-\frac{\omega_{\eta T}}{\sqrt{2}\,\omega_T}\frac{\overline{\underline{\underline{p}}}}{p_o}$$

En comparant avec l'équation (2) on en déduit que :

$$\zeta=\frac{p_o}{\omega_\eta}\times\frac{1}{1-\frac{\omega^2_{\eta T}}{\omega_\eta\omega_T}}$$

$\underline{\underline{a}}$ peut donc s'exprimer facilement en fonction de $\overline{\underline{\underline{\nabla r}}}$ :

$$\underline{\underline{a}}=\sqrt{2}\,\frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T}(\omega_\eta-\frac{\omega^2_{\eta T}}{\omega_T})^{-1}\overline{\underline{\underline{\nabla r}}}$$

D'autre part, la relation (7) et la relation (8) permettent d'écrire la déviation du tenseur diélectrique sous la forme :

$$\overline{\underline{\epsilon}} = -2\sqrt{\frac{2}{15}}\,\pi\,\nu\,(\alpha_{//}-\alpha_{\perp})\left\langle\frac{J^2}{J^2-\frac{3}{4}}\right\rangle_0^{\frac{1}{2}}\,\underline{\underline{a}}+\cdots$$

Les points de suspension se rapportent aux termes qui n'interviennent pas pour l'étude de la biréfringence mais que l'on doit prendre en considération pour le traitement de la diffusion Raman. En identifiant avec la relation (3) on en déduit :

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{15}}\,\pi\,\nu\,(\alpha_{//}-\alpha_{\perp})\left\langle\frac{J^2}{J^2-\frac{3}{4}}\right\rangle_0^{\frac{1}{2}}\frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T}\left(\omega_\eta-\frac{\omega_{\eta T}^2}{\omega_T}\right)^{-1}$$

Ou, en exprimant $\beta$ en fonction de $\eta$

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{15}}\,\pi\,\nu\,(\alpha_{//}-\alpha_{\perp})\left\langle\frac{J^2}{J^2-\frac{3}{4}}\right\rangle_0^{\frac{1}{2}}\frac{\eta}{p_0}\frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T}$$

La grandeur $\left\langle\frac{J^2}{J^2-3/4}\right\rangle$ peut être remplacée par 1 dans les gaz où les molécules se trouvent en nombre prépondérant dans l'état $j>2$ et

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{15}}\,\pi\,\nu\,(\alpha_{//}-\alpha_{\perp})\,\frac{\eta}{p_0}\frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \qquad (9bis)$$

A température constante, $\beta$ et par là l'effet de biréfringence dans un gaz à moyenne pression sont donc indépendants de la pression.

(Dans le domaine des pressions moyennes où $\overline{\underline{\nabla r}}$ varie très peu sur une distance de l'ordre du libre parcours moyen d'une molécule).

### II.2.3.4 MESURE DE LA BIREFRINGENCE D'ECOULEMENT DANS LES GAZ

Les premières manipulations ont été réalisées par F. Bass [19] avec un montage de polarimétrie classique.

Les gaz sont contenus dans un cylindre de Couette ; à cause des problèmes de bruit, chaque mesure est une moyenne sur une quinzaine de minutes ; $\Delta n$ a été mesuré en fonction de la pression et l'on constate bien que la biréfringence reste constante entre 0,1 mm Hg et 20 mm de Hg, l'étude de pressions supérieures n'ayant pu être faite à cause de l'apparition d'instabilités d'écoulement.

Enfin la biréfringence a été mesurée pour différents gaz en fonction du gradient de vitesse imposé, la linéarité a toujours été vérifiée.

Quantitativement, les valeurs de $\beta$ mesurées sont en bon agrément avec celles déduites de l'équation (9 bis). Le signe de $\omega_{\eta T}$ a été trouvé positif ce qui est en bon agrément avec l'étude de Gorter sur l'effet SENFTLEBEN-BEENAKKER [19 bis].

Pour donner une représentation de l'ordre de grandeur de $\frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T}$, on doit faire quelques remarques sur l'effet SENFTLEBEN-BEENAKKER de la viscosité. En présence d'un champ magnétique externe $\underline{H}$, le moment angulaire $\underline{J}$ d'une molécule diamagnétique subit une précession, qui détruit l'alignement, de fréquence $\omega_H = \gamma \|\underline{H}\|$ , $\gamma$ est appelé le rapport gyromagnétique de rotation.

L'équation (9) contient alors un terme additionnel $i\omega_H[\underline{J}.\underline{H}, \Phi]$ qui décrit ces précessions. $\|\underline{H}\|$

En conséquence l'équation (9 bis) contient un terme additionnel dû à la précession du tenseur de polarisation. Si la fréquence de précession $\omega_H$ est beaucoup plus grande que la fréquence de relaxation $\omega_T$, la polarisation tensorielle qui prend naissance dans les collisions est détruite (à l'exception des composantes $\frac{\underline{H}.\underline{a}.\underline{H}}{\|\underline{H}\|\|\underline{H}\|}$ )

En conséquence, la viscosité se rapproche de sa valeur isotrope $\eta_{iso} = \frac{p_o}{\omega_\eta}$ , la différence relative $\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\eta_{iso} - \eta}{\eta}$ entre les valeurs de la viscosité en absence et en présence de champ magnétique, tend vers une valeur de saturation lorsque :

$$\frac{\omega_H}{\omega_T} \to \infty$$

Cette valeur de saturation vaut : $\frac{\Delta\eta}{\eta_{sat}} = -\frac{\omega_{\eta T}^2}{\omega_\eta \omega_T}$

$\omega_T$ se déduit de la mesure de la largeur de la raie de diffusion Rayleigh dépolarisée, et $\omega_\eta = \frac{p_o}{\eta_{iso}}$

la mesure de l'effet Senftleben-Beenakker permet de comparer

$\omega^2_{\eta T}$ à $\omega_\eta \omega_T$ .

La variation relative de la viscosité est de l'ordre de $10^{-3}$ à $10^{-2}$ pour des gaz moléculaires tels que HD, $N_2$, CO ou $CO_2$ ; le rapport $\left| \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \right|$ est de l'ordre de $10^{-1}$.

Pour le gaz carbonique ou l'azote par exemple, à une pression de $10^{-3}$atm, $(\alpha_{/\!/} - \alpha_\perp) = 10^{-30}$ m$^3$, le coefficient $\beta$ serait de l'ordre de $10^{-15}$.

### II.2.3.5 CONCLUSION

L'étude théorique traitée ci-dessus après avoir montré l'existence d'un effet de biréfringence, a permis d'exprimer $\beta$ en fonction de données caractéristiques du fluide gazeux utilisé ; il est donc possible à priori de connaître l'ordre de grandeur de $\beta$ , ce qui facilite la vérification des résultats expérimentaux.

Il faut cependant noter que la mesure de la biréfringence amène un renseignement supplémentaire car la mesure de l'effet Senftleben-Beenakker associée à la mesure de la largeur de la raie Rayleigh dépolarisée fournissait $|\omega_{\eta T}|$ alors que la mesure de la biréfringence d'écoulement pourrait permettre une détermination du signe de $\omega_{\eta T}$ .

## II.3 PROPAGATION DANS UN ECOULEMENT GAZEUX LAMINAIRE

L'étude originale décrite ci-après, est celle de la propagation d'une onde plane monochromatique à l'intérieur d'une couche limite. Elle fait l'objet d'une publication dans la revue Optica Acta qui doit paraître très prochainement. Le milieu est constitué par un fluide transparent présentant de la biréfringence d'écoulement. Le cas de l'air a été plus particulièrement étudié.

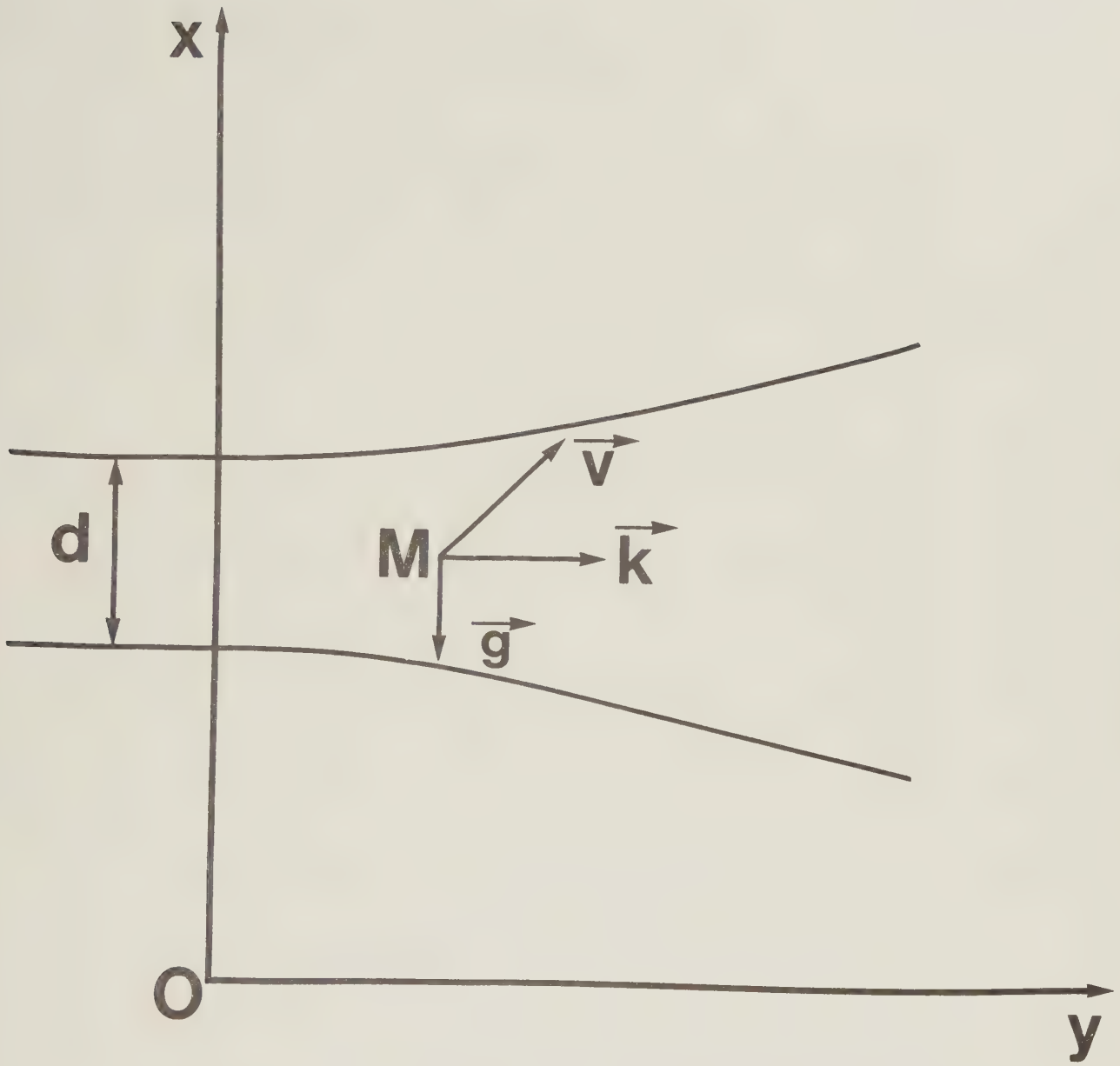



Fig. n° 3 - Représentation du trièdre orthogonal
formé par le vecteur d'onde, la vitesse et le gradient de vitesse.

## II.3.1 RELATION ENTRE LE TENSEUR DE PERMITTIVITE ET LE GRADIENT DE VITESSE

Le fluide étant supposé transparent et incompressible, $\underline{\underline{\epsilon}}$ le tenseur de permittivité du milieu peut être mis sous forme de la somme de deux termes : la permittivité du milieu au repos et un terme de perturbation, petit, qui est une fonction linéaire du gradient de vitesse dans le fluide [20].

Chaque composante $\epsilon_{ij}$ prend la forme

$$\epsilon_{ij} = \epsilon^{\circ} \delta_{ij} + \lambda_1 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$\delta_{ij}$ : le symbole de Kronecker
$\lambda_1$ : la constante dynamo-optique
$v$ : la vitesse du fluide.

Pour déterminer l'ordre de grandeur du terme de perturbation, il est possible d'exprimer $\lambda_1$ en fonction du coefficient de biréfringence $\beta = \Delta n / g$ ( $\Delta n$ représente la biréfringence et g le gradient de vitesse) [19].

Dans le cas d'une onde plane monochromatique qui se propage dans un fluide en mouvement, perpendiculairement à la vitesse et au "gradient de vitesse" (figure N°3).

$\underline{\underline{\epsilon}}$ prend la forme suivante :

$$(10) \qquad \underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon^{\circ} & 0 & \lambda_1 g \\ 0 & \epsilon^{\circ} & 0 \\ \lambda_1 g & 0 & \epsilon^{\circ} \end{pmatrix}$$

avec $g = \frac{dv_z}{dx}$ qui est une constante.

L'équation de Fresnel permet d'écrire :

$$(11) \qquad \det \left| n^2 \delta_{ik} - n_i n_k - \mu_o c^2 \epsilon_{ik} \right| = 0$$

$c$ : vitesse de la lumière
$n_i$ : composante du vecteur $\underline{n} = \frac{c}{\omega} \underline{k}$
$\omega$ : fréquence angulaire
$\underline{k}$ : vecteur d'onde
$\mu_o$ : perméabilité magnétique

Dans le cas d'une propagation le long de l'axe Oy (11) se met sous la forme :

$$(12) \qquad n^2 = \mu_o c^2 \epsilon^{\circ} \pm \mu_o c^2 \lambda_1 g$$

Soit $n_o$ , l'indice de réfraction du milieu au repos (12) s'écrit :

$$n = n_o \left(1 \pm \frac{\lambda_1 g}{2 \epsilon_o}\right)$$

le coefficient de biréfringence est donc : $\beta = n_o \frac{\lambda_1}{\epsilon_o}$

Dans le cas de l'air [21] $\beta$ a été déterminé expérimentalement, sa valeur est :

$\beta \simeq 10^{-14}$ MKSA de telle sorte que $\lambda_1 \simeq 10^{-25}$ MKSA

## II.3.2 EQUATIONS DE PROPAGATION

Le système des équations de Maxwell avec une dépendance temporelle en exp ( $i\omega t$) s'écrit :

(13) $\text{rot } \underline{E} = - i\omega \underline{B}$

(14) $\text{rot } \underline{H} = + i\omega \underline{D}$

(15) $\text{div } \underline{B} = 0$

(16) $\text{div } \underline{D} = 0$ avec en plus (17) $\underline{B} = \mu_o \underline{H}$ et (18) $\underline{D} = \underline{\underline{\epsilon}}\, \underline{E}$

$\underline{E}$, $\underline{H}$, $\underline{B}$, $\underline{D}$ sont respectivement les vecteurs champ électrique, champ magnétique, induction magnétique et déplacement électrique.
Les équations (15) et (17) imposent $\text{div } \underline{H} = 0$.
On peut poser $\underline{H} = \text{rot } \underline{A}$
pour satisfaire l'équation (13) on écrit
$\underline{E} = - i \mu_o \omega \underline{A} + \underline{\nabla} V$

V représentant une fonction scalaire arbitraire

En substituant ces valeurs de $\underline{E}$ et $\underline{H}$ dans les équations de MAXWELL, on obtient :

$$\underline{\text{rot}} (\underline{\text{rot}}\ \underline{A}) = i \omega \underline{\underline{\epsilon}} (-i \mu_o \omega \underline{A} + \underline{\nabla} V)$$

Pour simplifier on choisit $V = \frac{\text{div} A}{i \omega \epsilon_o}$ et on pose $k^2 = \mu_o \epsilon^o \omega^2$

et $\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon^o (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\eta}})$

L'équation (18) prend alors la forme :

$$\Delta \underline{A} + k^2(1+\underline{\underline{\eta}})\,\underline{A} + \underline{\eta}\,\nabla \mathrm{div}\underline{A} = 0 \qquad (19)$$

Une fois le vecteur $\underline{A}$ connu, on déduit facilement $\underline{E}$ et $\underline{H}$.

$$\underline{E} = -i\,\mu_o\,\omega\,\underline{A} - \frac{1}{\omega\,\epsilon^o}\,\nabla(\mathrm{div}\underline{A})$$

$$\underline{H} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$$

### II.3.3 CAS PARTICULIER OU k, v et g SONT PERPENDICULAIRES

La résolution sera effectuée uniquement dans le cas de la figure 3 qui correspond au montage expérimental d'un écoulement au voisinage de la paroi, qui a été réalisé postérieurement. L'onde incidente est un pinceau lumineux monochromatique de dimension infinie dans la direction $\overrightarrow{Oz}$, de largeur d dans la direction $\overrightarrow{Ox}$, il se propage suivant la direction $\overrightarrow{Oy}$, (d est grande devant la longueur d'onde ce qui permet de négliger les effets de diffraction dûs à la largeur du faisceau, le champ à l'intérieur du faisceau est transverse).
Le milieu présentant de la biréfringence d'écoulement est limité par les plans y = 0 et x = 0. La vitesse de l'écoulement est perpendiculaire à Oy et n'est fonction que de x :

$$\underline{v} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ v_z\,(x) \end{cases}$$

d'où :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon^o \begin{pmatrix} 1 & 0 & \eta\,(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ \eta\,(x) & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \quad \eta(x) = \frac{\lambda_1}{\epsilon^o}\frac{dv}{dx}$$

Le vecteur $\underline{A}$ vérifiant l'équation (19) ne doit pas dépendre de z, cette équation est donc équivalente au système simplifié suivant :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + k^2 A_x + k^2 \eta A_z = 0 \\ &\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + k^2 A_y = 0 \qquad (20) \\ &\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + k^2 \eta A_x + k^2 A_z + \frac{\eta \partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\eta \partial^2 A_y}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Le champ incident a la forme suivante :

$$\mathcal{E}_x = E_x^\circ \exp(-iky) \qquad \mathcal{H}_x = H_x^\circ \exp(-iky)$$
$$\mathcal{E}_y = 0 \qquad \mathcal{H}_y = 0$$
$$\mathcal{E}_z = E_z^\circ \exp(-iky) \qquad \mathcal{H}_z = H_z^\circ \exp(-iky)$$

avec : $\mu_o \omega H_x^\circ = -kE_z^\circ$ et $\mu_o \omega H_z^\circ = +kE_x^\circ$

Il faut maintenant satisfaire les conditions aux limites :
continuité des composantes de $\underline{H}$ (normales et tangentielles)
continuité des composantes tangentielles de $\underline{E}$
continuité de la composante normale de $\underline{D}$ dans le plan y=o
Si l'on néglige la réflexion de l'onde incidente sur le plan y=o ainsi que la rétrodiffusion de l'onde se propageant dans le milieu en mouvement, les conditions aux limites seront satisfaites si :

$$A_x^\circ = \frac{i}{\mu_o \omega} E_x^\circ \qquad \frac{\partial A_x^\circ}{\partial y} = -H_z^\circ$$
$$A_y = 0$$
$$A_z^\circ = \frac{i}{\mu_o \omega} E_z^\circ \qquad \frac{\partial A_z^\circ}{\partial y} = H_x^\circ$$

Et le système d'équations différentielles de second ordre (20) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + k^2 A_x + k^2 \eta A_z = 0$$
$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + k^2 \eta A_x + k^2 A_z + \eta \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = 0$$

avec : $\underline{A}(x,0) = \underline{A}^\circ$ et $\frac{\partial \underline{A}}{\partial y}(x,0) = -ikA^\circ$

Le champ électrique se déduira de $\underline{A}$ de la façon suivante :

$$E_x = -i \mu_o \omega A_x - \frac{i}{\omega \epsilon_o} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$$

$$E_y = -\frac{i}{\omega \epsilon_o} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y}$$

$$E_z = -i \mu_o \omega A_z$$

## II.3.4 CALCUL DES TERMES DE LA MATRICE DE JONES DU MILIEU

Si nous supposons que l'onde plane incidente est polarisée à 45° des axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oz}$ les composantes $A_x$ et $A_z$ auront le même ordre de grandeur et le terme

$$\eta \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \quad \text{sera négligeable devant} \quad \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}$$

Posons $A_x+A_z=A$ et $A_x-A_z=B$ ;
A et B sont deux modes transverses de propagation polarisés rectilignement à 45° de la vitesse d'écoulement et du gradient de vitesse et satisfaisant à deux équations scalaires de Helmholtz indépendantes.

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + k^2 (1 + \eta) A = 0$$

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + k^2 (1 - \eta) B = 0$$

La méthode de résolution utilisée est la même que celle utilisée par V.I.Tatarskii [2] pour l'étude de la propagation des ondes en atmosphère turbulente. On pose :

$$A = A^{\circ} \exp(-iky + \varphi_1) \text{ avec } \left| \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|$$

puisque l'on néglige la rétrodiffusion.
L'équation (21) devient :

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + k^2 \eta(x) = 0$$

Cette équation peut être résolue par la méthode des fonctions de Green [22]

$$(24) \qquad \varphi_1 = \frac{k^2}{\sqrt{8\pi i k}} \int_0^y dy' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \frac{-ik(x-x')^2}{2(y-y')}}{\sqrt{y-y'}} \eta(x') dx'$$

En réalité, les bornes de l'intégrale sur dx' ne sont pas $\pm \infty$ (hypothèse d'une onde plane) mais h et h+d ; h étant la distance du faisceau à la paroi et d le diamètre.

donc

$$\varphi_1 = \frac{k^2}{\sqrt{8\pi i k}} \int_0^y dy' \int_h^{h+d} \frac{\exp \frac{-ik(x-x')^2}{2(y-y')}}{\sqrt{y-y'}} \eta(x') dx'$$

Les solutions de (21) et (22) peuvent s'écrire :

$A = A^{\circ} \exp(-iky) \exp \varphi_1$

$B = B^{\circ} \exp(-iky) \exp \psi_1$

où $\psi_1$ se déduit de $\varphi_1$ en changeant $\eta$ en $-\eta$ ; d'après l'équation (24) on voit que $\psi_1 = -\varphi_1$. D'où

$$A_x = \frac{e^{-iky}}{2}[(e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1})A_x^{\circ} + (e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1})A_z^{\circ}]$$

et

$$A_z = \frac{e^{-iky}}{2}[(e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1})A_x^{\circ} + (e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1})A_z^{\circ}]$$

Il est facile d'en déduire les composantes du champ électrique

$$E_x = \frac{e^{-iky}}{2}\left\{(e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1})E_x^{\circ} + (e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1})E_z^{\circ} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\left[(e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1})E_x^{\circ} + (e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1})E_z^{\circ}\right] + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^2}\right)^2\left[e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1})E_x^{\circ} + (e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1})E_z^{\circ}\right]\right\}$$

$$E_y = \frac{e^{-iky}}{2k^2}\left\{\left[(e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1})E_x^{\circ} + (e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1})E_z^{\circ}\right]\left[-ik\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x \partial y}\right] + \left[(e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1})E_x^{\circ} + (e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1})E_z^{\circ}\right]\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right]\right.$$

$$E_z = \frac{e^{-iky}}{2}\left[(e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1})E_x^{\circ} + (e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1})E_z^{\circ}\right.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}$ sont obtenues en substituant $\eta(x)$ dans la relation (24) par $\frac{\partial\eta}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$

La dérivée partielle $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}$ est obtenue de la même manière mais on doit tenir compte de la discontinuité de la fonction $\eta(x)$ sur le plan y=o

$\eta(x)$ peut être exprimée sous la forme $\eta(x) \times Y(y)$ où Y(y) est la fonction d'Heaviside. D'où :

$$(25)\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{k^2}{\sqrt{8\pi ik}}\int_h^{h+d} \frac{\exp\frac{-ik(x-x')^2}{2y}}{\sqrt{y}}\,\eta(x')\,dx'$$

$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x \partial y}$ est obtenue en changeant $\eta(x)$ en $\frac{d\,\eta(x)}{d\,x}$ dans l'expression ci-dessus.

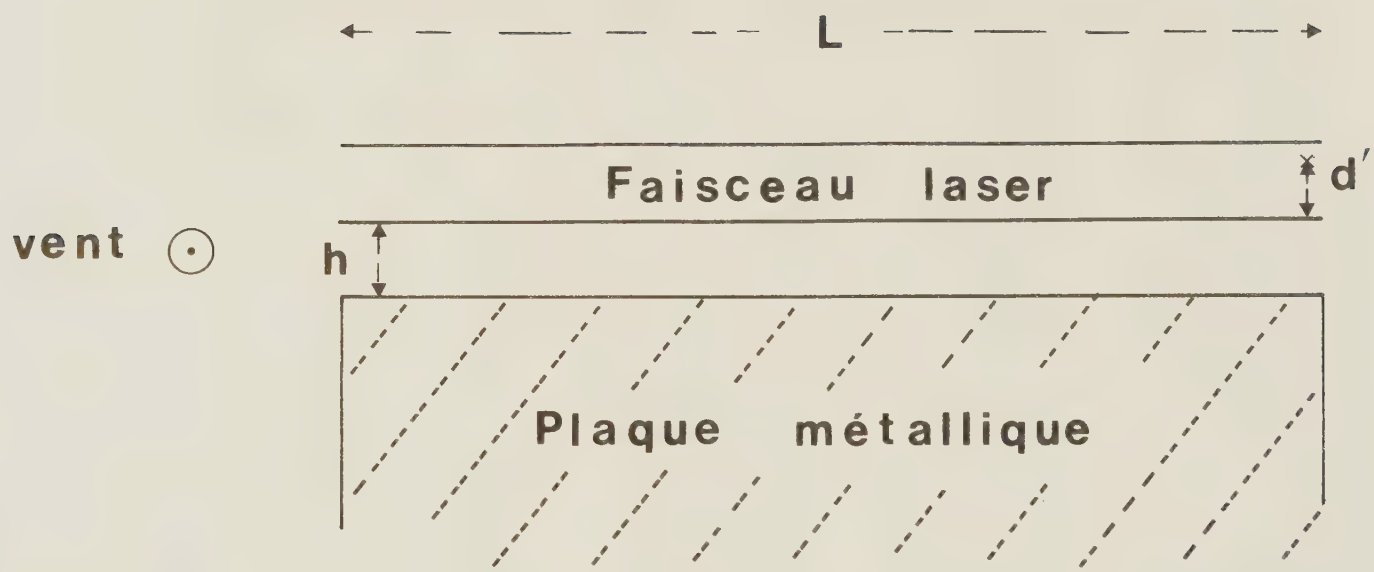



Fig n°3 bis : Notations utilisées lors de l'étude du dichroïsme et de la biréfringence.

On peut déduire facilement les coefficients de la matrice de JONES de l'écoulement

Avec les notations : $\begin{pmatrix} E_x \\ E_z \end{pmatrix} = e^{-iky} \begin{pmatrix} J_\alpha & J_\beta \\ J_\gamma & J_\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^\circ \\ E_z^\circ \end{pmatrix}$

$$J_\alpha = \frac{e^{\varphi_1}}{2k^2}\left(k^2 + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{e^{-\varphi_1}}{2k^2}\left(k^2 - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$J_\beta = \frac{e^{\varphi_1}}{2k^2}\left(k^2 + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{e^{-\varphi_1}}{2k^2}\left(-k^2 + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$J_\gamma = \frac{e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1}}{2}$$

$$J_\delta = \frac{e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1}}{2}$$

### II.3.5 CAS PARTICULIER : BIREFRINGENCE D'ECOULEMENT DE L'AIR

Les valeurs numériques des coefficients de la matrice de JONES du fluide e mouvement peuvent être calculées pour différents cas de propagation.

Dans le cas d'un écoulement laminaire, comme celui obtenu lors de la manipulation de vérification décrite ci-après, le faisceau laser se propag à l'intérieur d'une couche limite obtenue au voisinage d'une paroi, dans u soufflerie. La figure n°3 bis explique les différentes notations utilisées La vitesse du fluide a pour expression :

$$v = v_\infty \left[\frac{2x}{\delta} - 2\left(\frac{x}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{x}{\delta}\right)^4\right] \qquad \text{pour} \quad x \leqslant \delta$$

$\delta$ représentant l'épaisseur de la couche limite
$v_\infty$ la vitesse du fluide, hors de la couche limite

D'où

$$\eta(x) = \frac{\lambda_1 v_\infty}{\epsilon\theta}\frac{2}{\delta}\left[1 - 3\left(\frac{x}{\delta}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\delta}\right)^3\right]$$

$\delta$ est de l'ordre du millimètre et $v_\infty$ atteint une dizaine de mètres par seconde.

Afin de connaître l'influence des différents paramètres, nous avons effectué les calculs en faisant varier : L la distance parcourue par le faisceau laser (de 1,5 m à 2,5 m); h la hauteur du faisceau laser au dessus du sol (de 0,02 mm à 0,5 mm); d'la distance du point considéré au bord du faisceau (de 0.1 mm à 0.7 mm);(les points 0,6 et 0,7 mm sont donc, situés en dehors du faisceau géométrique).

Les expressions littérales des trois composantes du champ électrique étant connues, nous avons cherché à calculer l'ordre de grandeur de la composante Ey. On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = e^{-iky} \begin{pmatrix} J_\alpha & J_{12} & J_\beta \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_\gamma & J_{32} & J_\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^\circ \\ E_y^\circ \\ E_z^\circ \end{pmatrix} .$$

Les différents coefficients J ont été calculés numériquement à l'aide d'un ordinateur IBM 370.
Les parties réelles et imaginaires de $J_{21}$ et $J_{23}$ sont toujours très faibles ( $\leqslant 10^{-8}$) il y a donc apparition d'une composante Ey fonction de $E_x^\circ$ et $E_z^\circ$ mais elle est très petite.

D'autre part, les parties réelles de $J_\alpha$ et de $J_\delta$ restent toujours égales à l'unité (à $10^{-11}$ près), les parties imaginaires sont égales mais très faibles ( $\leqslant 10^{-7}$)
Les parties réelles de $J_\beta$ et de $J_\gamma$ sont toujours égales (de l'ordre de $10^{-4}$) les parties imaginaires sont elles aussi toujours égales et du même ordre de grandeur.
Le champ électrique peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$E_x = E_x^\circ + i\,\epsilon_1 E_x^\circ + (\epsilon_2 + i\epsilon_3)\, E_z^\circ$$

$$E_z = (\epsilon_2 + i\epsilon_3)\, E_x^\circ + E_z^\circ + i\,\epsilon_1 E_z^\circ$$

$\epsilon_1$ étant très petit par rapport à $\epsilon_2$ et $\epsilon_3$ qui sont eux-mêmes très petits devant l'unité.

La matrice de JONES prend donc la forme

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_1 \end{pmatrix}$$

$J_1$ et $J_2$ étant deux complexes (Cf. annexe II)

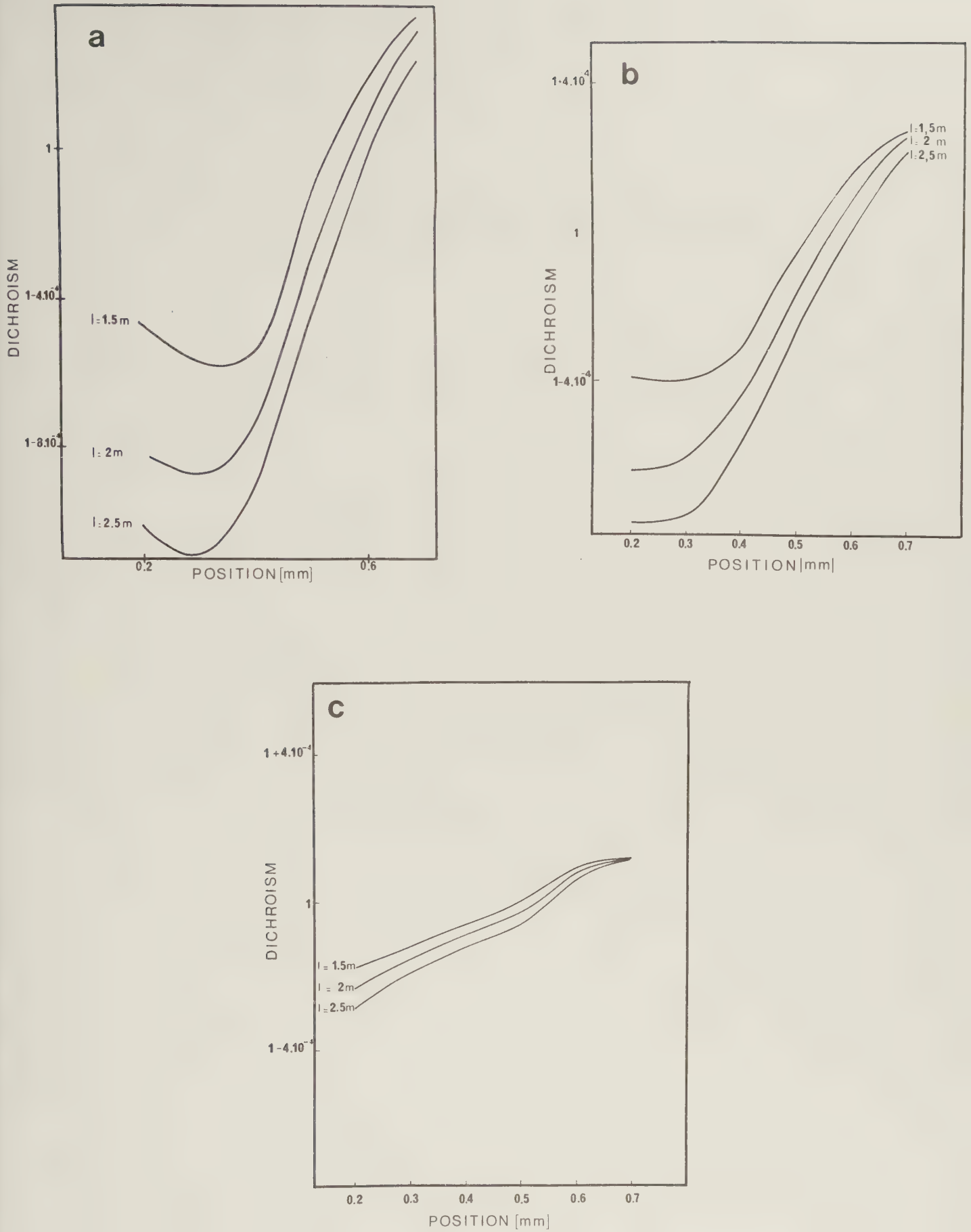



Fig. n° 4 - Evolution du dichroïsme en fonction du point considéré dans le faisceau laser. La distance du faisceau à la paroi est la suivante a) 0,02 mm - b) 0,2 mm - c) 0,5 mm

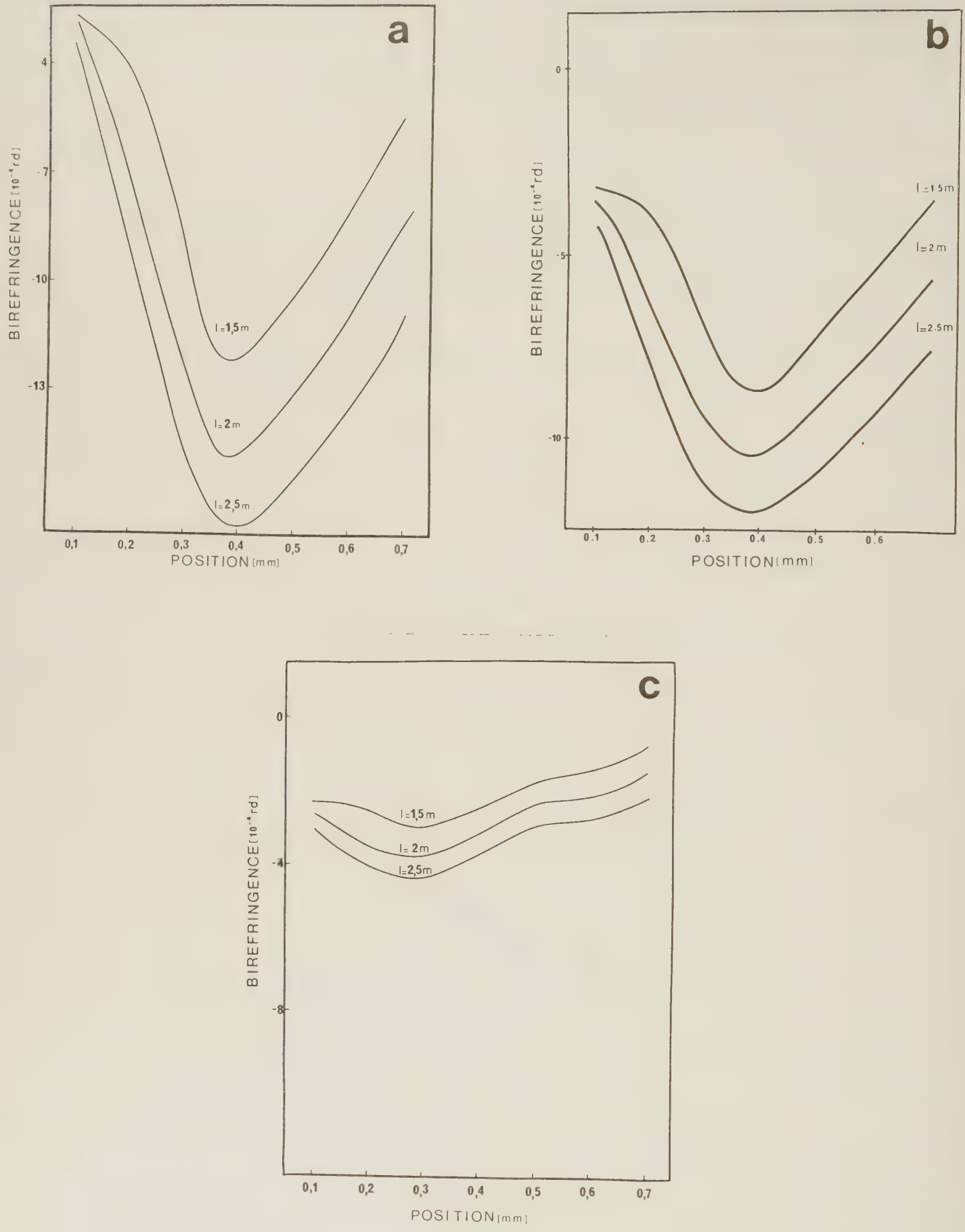



Fig. n° 5 - Evolution de la biréfringence en fonction du point considéré dans le faisceau laser. La distance du faisceau à la paroi est la suivante :
a) 0,02 mm b) 0,2 mm c) 0,5 mm.

Pour diagonaliser la matrice $\hat{J}$, il suffit d'effectuer une rotation de 45° par rapport aux directions Ox et Oz, elle peut être alors écrite sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} (J_1 + J_2) & 0 \\ 0 & (J_1 - J_2) \end{pmatrix}$$

$\hat{J}$ représente donc un milieu montrant de la biréfringence linéaire et du dichroïsme dont les axes font un angle de 45° avec la vitesse et le gradient de vitesse de l'écoulement.
Le dichroïsme linéaire vaut $D = \frac{|J_1 + J_2|}{|J_1 - J_2|}$

et la biréfringence linéaire vaut :
$\delta = \arg (J_1 + J_2) - \arg (J_1 - J_2)$

La figure N°4 représente l'évolution du dichroïsme en fonction de la position du point considéré dans le faisceau laser. On constate que le dichroïsme augmente en même temps que la distance de propagation. De même, on vérifie que plus le faisceau laser s'écarte de la paroi, plus l'effet de dichroïsme diminue.

La figure N°5 représente la même étude que la figure N°4 mais pour la biréfringence. On constate encore l'augmentation du phénomène en même temps que la distance de propagation et sa diminution au fur et à mesure que l'on s'écarte de la paroi, donc au fur et à mesure que le gradient de vitesse diminue. On vérifie que l'effet de biréfringence n'est pas symétrique par rapport au centre du faisceau puisque le gradient de vitesse décroît lorsque la distance à la paroi augmente.

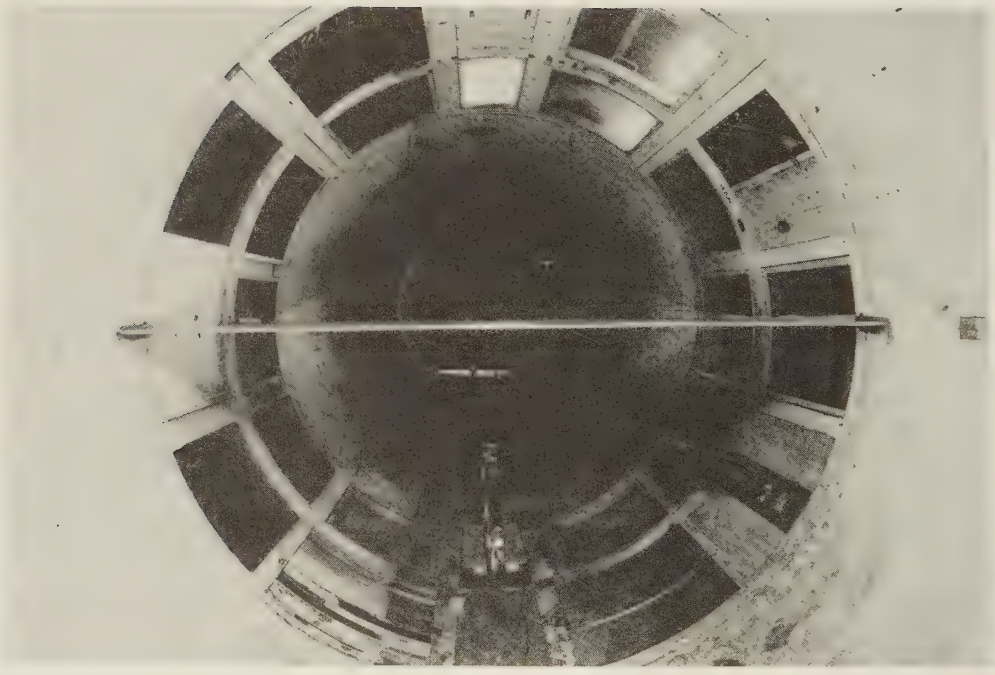


Fig. n°6. Vue générale de l'expérience réalisée en soufflerie.

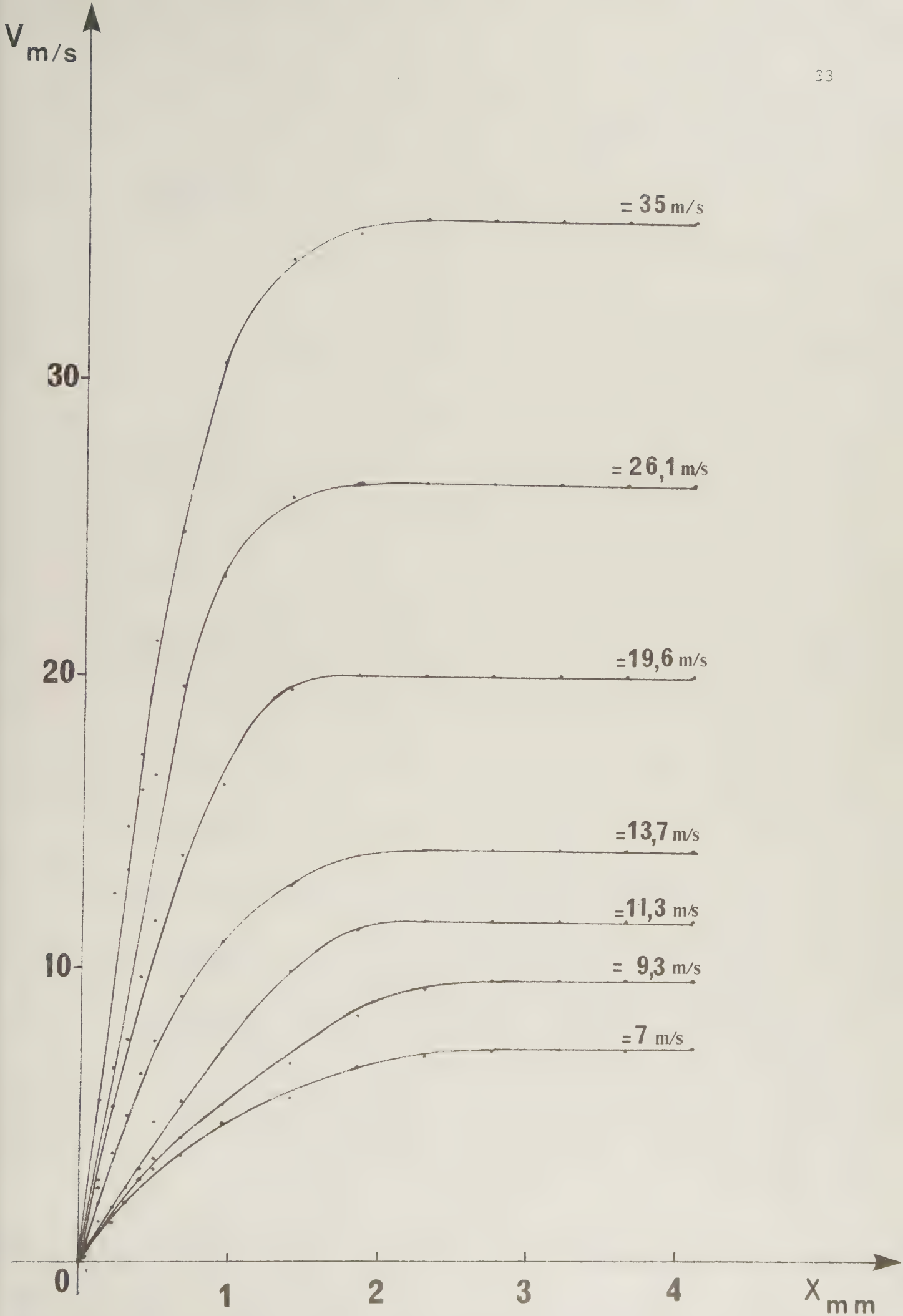



Fig n° 7 : Valeurs expérimentales de la vitesse de l'air au voisinage de la paroi pour différentes valeurs de la vitesse nominale.

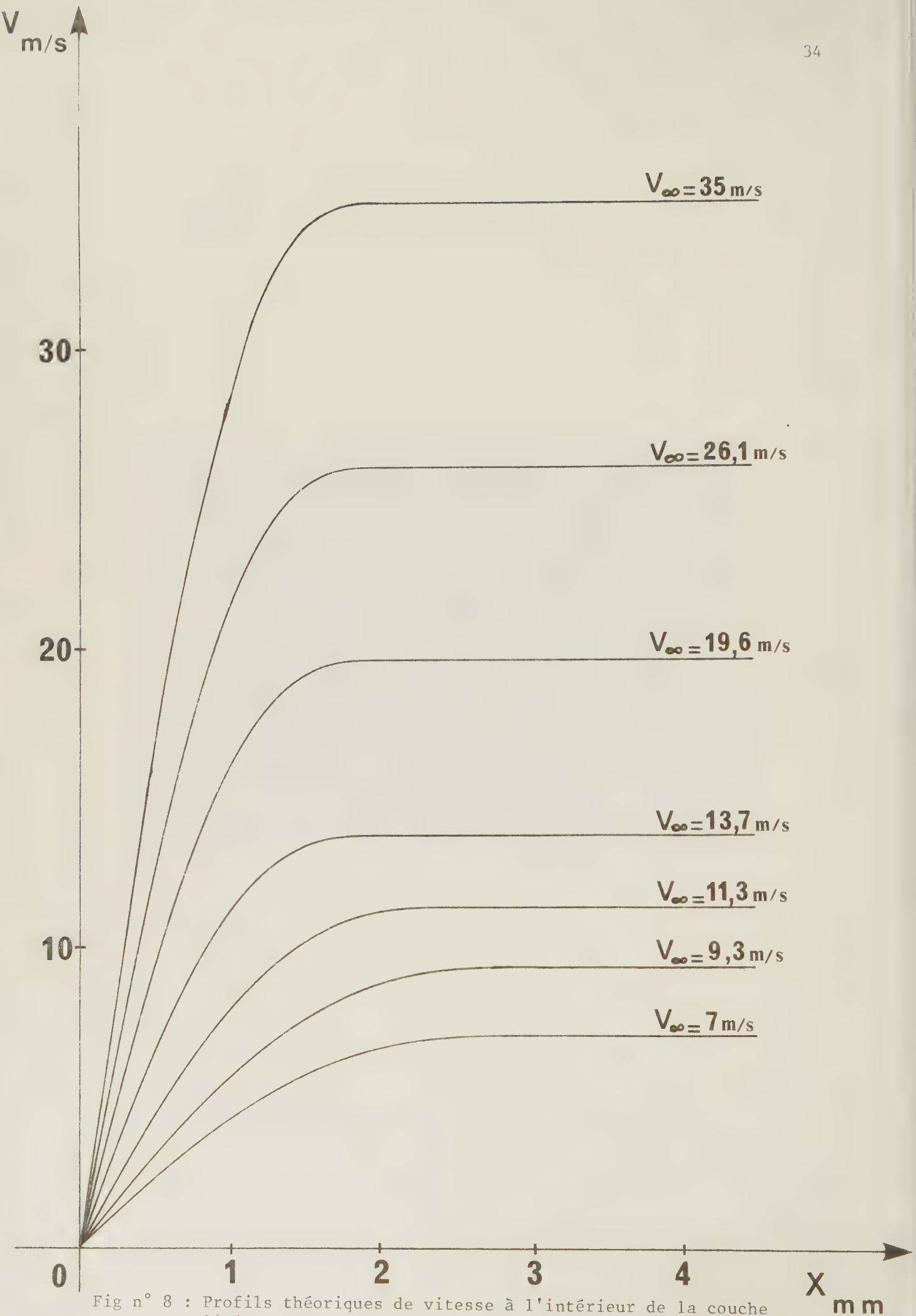



Fig n° 8 : Profils théoriques de vitesse à l'intérieur de la couche limite.

## II.4 ETUDE EXPERIMENTALE EN SOUFFLERIE

Nous avons mis au point au laboratoire un montage expérimental [21] qui a été ensuite adapté à l'une des souffleries de l'institut aérotechnique de Saint-Cyr l'Ecole. Il était destiné à mesurer le changement de polarisation d'une onde plane se propageant dans une couche limite en écoulement laminaire. Ceci a permis de vérifier expérimentalement l'existence d'une biréfringence d'écoulement de l'air dans des conditions normales de température et de pression et de calculer l'ordre de grandeur du coefficient de biréfringence $\beta$

### II.4.1 PROFIL EXPERIMENTAL ET THEORIQUE DE LA VITESSE ET DE SES DERIVEES DANS LA COUCHE LIMITE.

La paroi est constituée par une plaque métallique rectifiée qui est inclinée, à l'intérieur de la soufflerie, photo n°6 de telle sorte que l'écoulement reste laminaire jusqu'à une vitesse - à l'extérieur de la couche limite - égale à 35 m/s, le profil de vitesse à l'intérieur de la couche limite est déterminé à l'aide de deux tubes de Pitot, l'un situé au point de mesure, l'autre situé en dehors de la couche limite et servant de référence.
Le nombre de Reynolds est défini [15] par :

$$R = \frac{v_\infty l}{\xi}$$

$v_\infty$: vitesse en dehors de la couche limite
$l$ : distance du point étudié au bord d'attaque
$\xi$ : viscosité dynamique de l'air

Le tableau ci-dessous précise les ordres de grandeur des nombres de Reynolds en fonction des vitesses utilisées.

| $v_\infty$ (m/s) | 11 | 19 | 35 |
|---|---|---|---|
| R. $10^3$ | 174 | 300 | 540 |

La figure n°7 représente les profils mesurés pour différentes vitesses nominales.

La figure n°8 représente les profils théoriques pour les mêmes vitesses nominales ($v_\infty$) à partir de l'équation [15]

$$v = v_\infty \left[ 2\frac{x}{\delta} - 2\left(\frac{x}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{x}{\delta}\right)^4 \right]$$

$v_\infty$ : vitesse en dehors de la couche limite
$x$ : distance à la paroi
$\delta$ : épaisseur de la couche limite

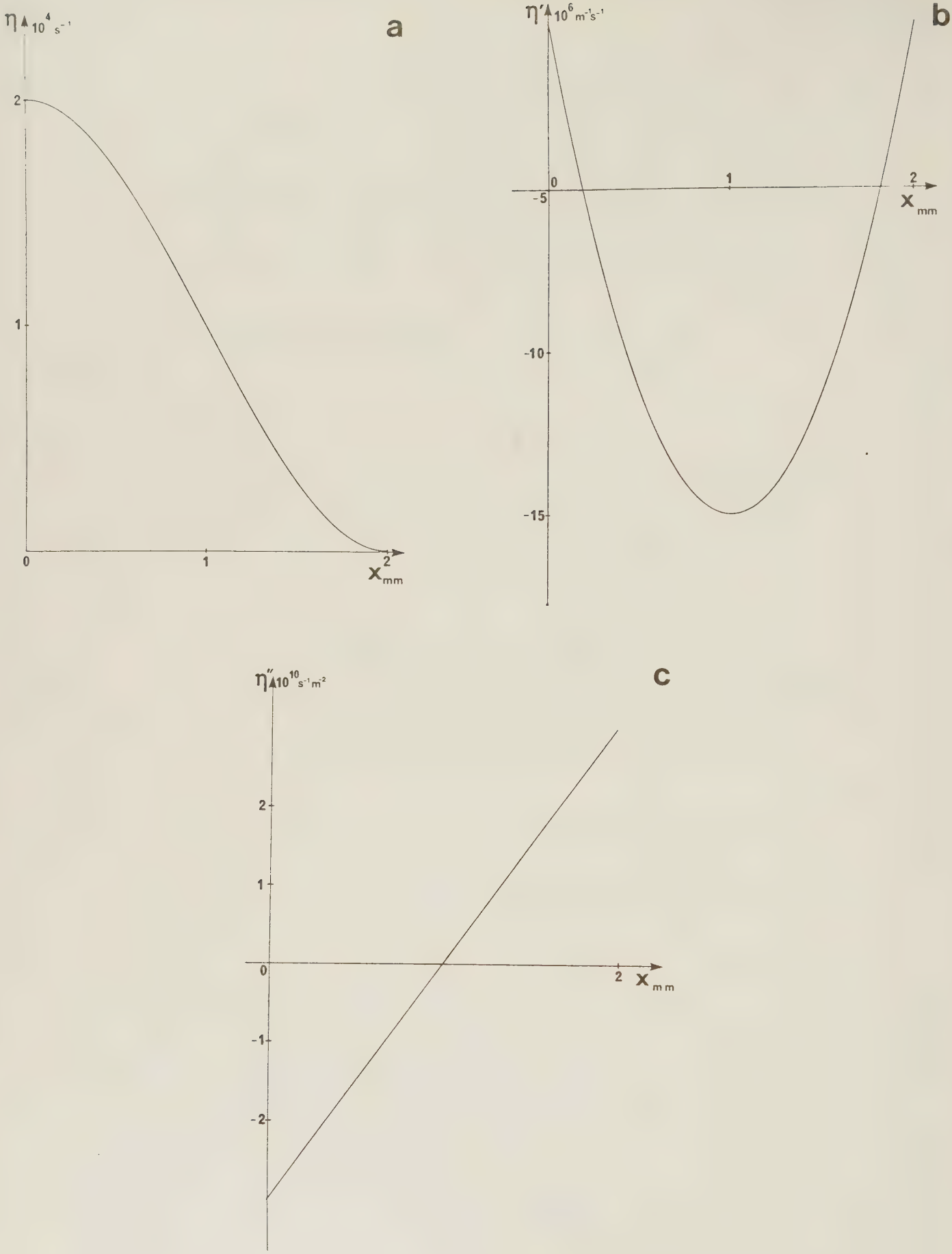



Fig. n° 9 - Evolution de la valeur théorique du gradient de vitesse et de ses dérivées à l'intérieur d'une couche limite de 2 mm.
a) gradient de vitesse b) dérivée première du gradient c) dérivée seconde du gradient.

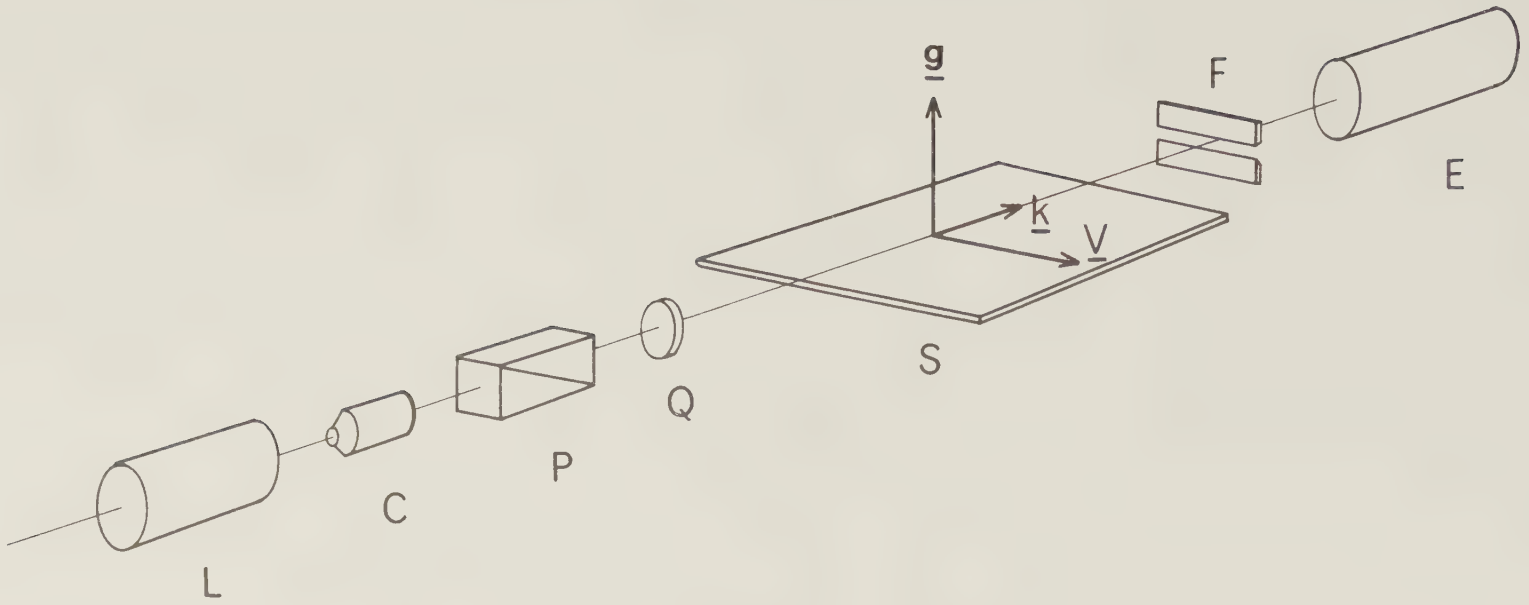



Fig. n° 10 - Schéma de l'appareillage

L : laser ; C : afocal ; P : polariseur ; Q : lame λ/4 ; S : paroi plane fixe ; F : fente ; E : ellipsomètre

$\underline{g}$ : gradient de vent ; $\underline{k}$ vecteur d'onde ; $\underline{v}$ : vitesse du vent.

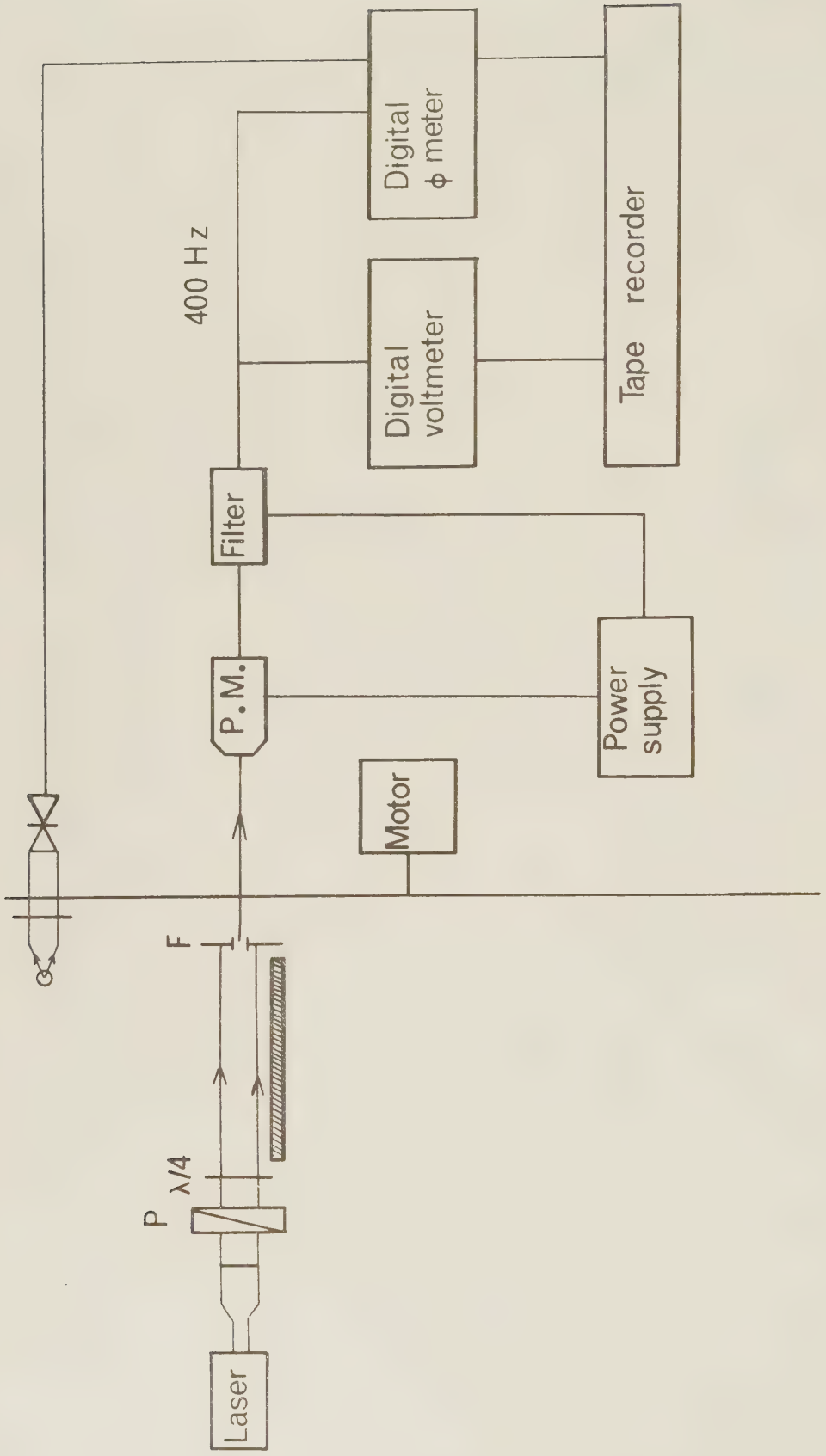



Fig. n° 11 - Synoptique de la partie électronique.

On vérifie la bonne concordance des deux réseaux de courbes.
La figure n°9 représente les profils théoriques du gradient de vitesse, de sa dérivée première et de sa dérivée seconde dans le cas d'une vitesse nominale d'une vingtaine de mètres/seconde et d'une couche limite d'environ 2mm.

### II.4.2 DESCRIPTION DU MONTAGE.

La figure n°10 représente le montage expérimental utilisé. Un laser He-Ne emet un faisceau de lumière cohérente, monochromatique ( $\lambda$ = 6328 Å) qui est agrandi grâce à un afocal (C), un polariseur réglé au maximum de la lumière émergente puis une lame quart d'onde permettent l'obtention d'une lumière polarisée circulairement. Celle-ci se propage à l'intérieur de la couche limite perpendiculairement à la direction du vent et à son gradient (le gradient de vitesse est donc le même tout au long du faisceau, à l'intérieur de la couche limite). On choisit d'étudier une abscisse en sélectionnant une partie du faisceau laser à l'aide d'une fente F de largeur : 0,5mm qui peut se déplacer verticalement. La partie émergente du faisceau est analysée par un ellipsomètre [23]. L'anisotropie du milieu traversé ayant provoqué une elliptisation de la polarisation, l'étude de l'ellipse permet de connaître l'ellipsoïde des indices correspondant au milieu.

A l'intérieur de cet ellipsomètre, l'énergie incidente est modulée par un analyseur tournant, le courant d'anode du photomultiplicateur est

$$I = \frac{1}{2} \text{Imax} \left[ 1 + \cos 2\gamma \cos 2 ( \omega t + \zeta ) \right]$$

avec $\gamma$ = arc tg (b/a) ; a et b représentant le grand axe et le petit axe de la polarisation de la lumière.
$\zeta$ est l'angle entre le grand axe et la position de référence.
$\omega$ est la fréquence de rotation de l'analyseur.

La figure n°11 schématise le traitement du signal. Un filtre sélectif sépare le courant continu et le courant alternatif, le premier est relié à une alimentation qui permet d'asservir I max à une valeur constante, le second est analysé par un voltmètre qui, après étalonnage, fournit directement cos $2\gamma$ et par un phasemètre qui, par une mesure du déphasage entre le signal reçu et le signal de référence, fournit l'angle $2\zeta$ .

Finalement, cos $2\gamma$ et $2\zeta$ sont affichés et enregistrés sur un ruban de papier perforé en même temps que les données d'un anémomètre à raison d'un enregistrement par seconde.
Sur la photo n°12, l'ellipsomètre et les différents instruments d'enregistrement sont visualisés.
Pour avoir la détectivité maximum, la lumière incidente était toujours polarisée circulairement.

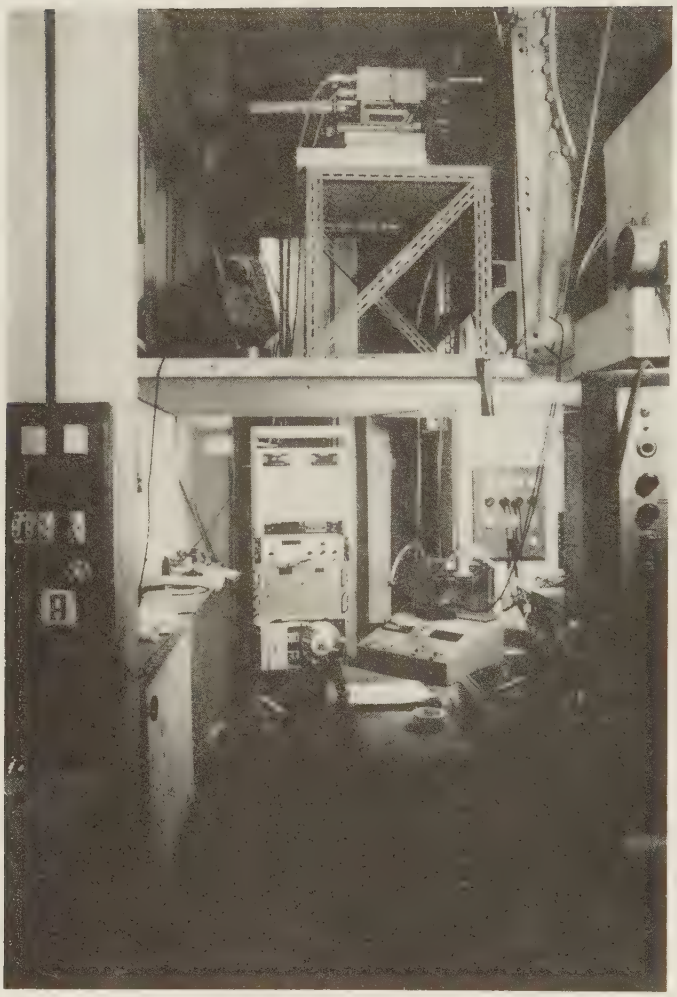


Fig. n°12. Ellipsomètre et appareils d'enregistrements.

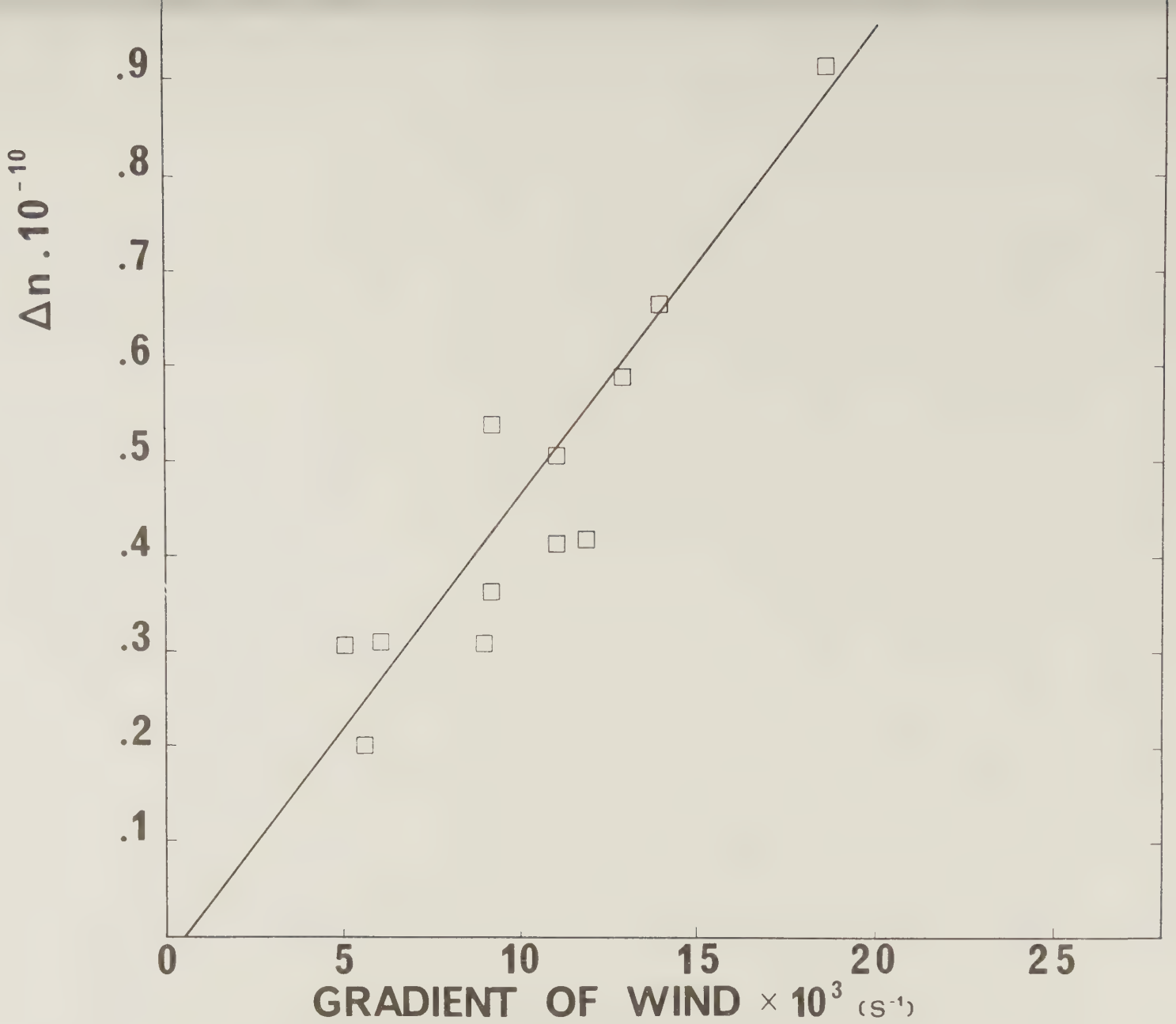



Fig. n° 13 - Valeurs expérimentales de Δn, obtenues en soufflerie pour différents gradients de vent (régime laminaire)

Soit $\varphi$ le déphasage introduit par la traversée d'une épaisseur d'air e, la lumière émergente devient elliptique ; son ellipticité est :

(26) $$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}}$$

$\varphi$ étant très petit, $\sin\varphi$ peut être confondu avec $\varphi$ et la dérivation de (26) permet d'écrire

$$\frac{d(b/a)}{d\varphi}\left(\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right)^{-1/2}\frac{1}{2}\frac{-2}{(1+\varphi)^2}\simeq -1$$

donc b/a varie comme $\varphi$ en valeur absolue,

$$\varphi=\frac{2\pi\,\Delta ne}{\lambda}$$

$\lambda$ représentant la longueur d'onde utilisée, il est donc facile de déduire $\Delta n$ de cos $2\gamma$
la détectivité est alors de $10^{-4}$ rd sur $2\gamma$ et de
$1{,}7\ 10^{-3}$ rd sur $2\zeta$
La biréfringence est ici caractérisée par $\Delta n$, différence entre l'indice ordinaire et l'indice extraordinaire ; elle a été déterminée pour trois vitesses hors couche limite de 18, 27 et 33 m/s. Chaque mesure est faite 10 fois. On constate une assez grande dispersion sur les mesures expérimentales d'où une mauvaise précision sur les valeurs de $\Delta n$. Ceci est dû en particulier :
- à la circularité imparfaite de la lumière incidente.
- aux vibrations résiduelles qui rendent difficile la sélection d'une position précise dans le faisceau à l'aide de la fente.
- à la déviation du faisceau provoquée par l'échauffement de la paroi par les molécules d'air en mouvement.

De plus, la valeur du gradient de vitesse choisie est nécessairement très imprécise puisque le diamètre du faisceau laser n'est pas petit devant l'épaisseur de la couche limite ; en particulier dans la région (cf. figure 9) où le gradient de vitesse varie de manière abrupte.

Malgré de nombreuses mesures qui ont permis de faire des moyennes, il ne faut pas considérer les valeurs de $\Delta n$ comme mieux que des ordres de grandeur, les erreurs relatives pouvant parfois atteindre 50%.

La figure n°13 représente la variation de $\Delta n$ en fonction du gradient de vent, compte tenu des incertitudes signalées ci-dessus, la loi de variation peut être considérée comme linéaire. La droite a été tracée en utilisant le critère des moindres carrés ; le fait qu'elle ne passe pas par l'origine montre bien que la lumière incidente n'est pas parfaitement circulaire.

On en déduit pour le coefficient de biréfringence $\beta = \Delta n/g$ (g étant le gradient de vitesse) une valeur expérimentale de $5\ 10^{-15}$ s.

Les lignes neutres sont à $\pm$ 45° de la direction du gradient de vitesse.

## II.5 CONCLUSION

L'étude précédente montre donc la liaison entre les caractéristiques de polarisation d'une onde plane ayant traversé un fluide s'écoulant en régime laminaire et les caractéristiques de cet écoulement. La partie expérimentale ayant permis de vérifier l'existence d'un coefficient de biréfringence d'écoulement et de déterminer son ordre de grandeur dans le cas où le fluide est de l'air à température et à pression normales, il faut remarquer que la valeur expérimentale de $\beta$ est compatible avec les valeurs théoriques prévues lors de l'étude de la théorie de Waldmann.

L'étude qui va être décrite maintenant concerne le calcul de la polarisation - représentée par le vecteur de Stokes - d'une onde diffusée latéralement.

# III. DIFFUSION D'UNE ONDE PLANE MONOCHROMATIQUE

Les calculs originaux que nous avons faits dans le cas de la diffusion sont, sous une forme très condensée, sur le point d'être publiés par la revue Optica Acta.

## III.1 DIFFUSION D'UNE ONDE PLANE PAR UN FLUIDE EN MOUVEMENT

L'étude expérimentale qui vient d'être décrite montre la possibilité de relier l'existence d'un gradient de vitesse à la mesure de la polarisation d'un faisceau laser ayant traversé le milieu en écoulement. Mais il s'agit d'une mesure globale qui fournit le gradient de vitesse moyen sur le chemin parcouru par la lumière d'analyse. Pour réaliser des mesures ponctuelles, il faut opérer, non plus en transmission mais en diffusion ; ceci représente l'étude du chapitre IV qui suppose que le processus de diffusion prépondérant est semblable à une diffusion Rayleigh. L'annexe III vérifiera cette hypothèse. Ici nous calculons la matrice de Mueller du volume diffusant lorsque la diffusion est due :

1°. Aux variations d'indice créées par l'existence d'un gradient de vitesse.

2°. Aux variations d'indice dues aux fluctuations thermiques du milieu car on connait leur existence dans le montage expérimental choisi.

Nous commençons par calculer la polarisation d'une onde plane monochromatique diffusée par un milieu transparent, présentant de la biréfringence d'écoulement, lorsque le régime est laminaire.

### III.1.1 EXPRESSION DU VECTEUR DE STOKES

Le milieu considéré étant faiblement diffusant, l'approximation de Born est ici applicable [2] c'est à dire que l'on peut faire l'approximation de la diffusion simple, il est alors possible de calculer la matrice de Mueller d'un volume diffusant.

Comme dans le cas de la transmission traité dans le chapitre précédent, l'étude concerne une onde plane incidente qui se propage perpendiculairement à la direction du gradient de vitesse.

Le système des équations de Maxwell (13) - (18) permet d'écrire l'équation de propagation [8] dans le fluide en mouvement

$$\Delta \underline{E} + k^2 \underline{E} = -k^2 \underline{\underline{\eta}}\, \underline{E} + \underline{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\underline{E}) \qquad (27)$$

Avec la condition

(28) $$\text{div}\ \epsilon^{\circ}(\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{\eta}})\underline{E}=0$$

$\underline{E}$ représente le champ électrique

k le nombre d'onde

$\underline{\underline{\eta}}$ un tenseur de rang 2 décrivant le gradient de vitesse

$$\text{et}\quad \eta_{ij} = \frac{\lambda_1}{\epsilon^{\circ}}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$\lambda_1$ est la constante dynamo-optique

$\epsilon^{\circ}$ est la constante dielectrique du milieu au repos

Dans le cas où le fluide étudié est un liquide, le champ électrique, à la sortie du liquide, se propage dans le milieu environnant où se trouve l'observateur - en général, la lumière parcourt une petite distance dans de l'air qui peut être considéré comme au repos - en obeïssant à l'équation :

(27 bis) $$\Delta\underline{E}+k^2\underline{E}=\underline{\text{grad}}(\text{div}\underline{E})$$

La condition (28) permet d'écrire (27) sous la forme :

$$\Delta\underline{E}+k^2\underline{E}=-k^2\underline{\underline{\eta}}\ \underline{E}-\underline{\text{grad}}(\text{div}\,\underline{\underline{\eta}}\ \underline{E})$$

ou sous la forme matricielle suivante :

(29) $$(\Delta+k^2)\underline{E}=-\hat{C}\underline{E}$$

La fonction de Green [24] G (r) est définie par :

$$(\Delta+k^2)G(r)=\delta^3(\vec{r})$$

$\delta^3(\vec{r})$ représente le produit $\delta_x(r).\ \delta y(r).\ \delta_z(r)$ ; $\delta(r)$ étant la fonction de Dirac.

Chaque composante $E_i$ (r) du champ électrique peut se mettre sous la forme d'une équation intégrale :

(30) $$E_i(r)=E_{\circ\ i}(r)-\sum_k \int_V G(r-r_1)C_{ik}(r_1)E_k(r_1)d^3r_1$$

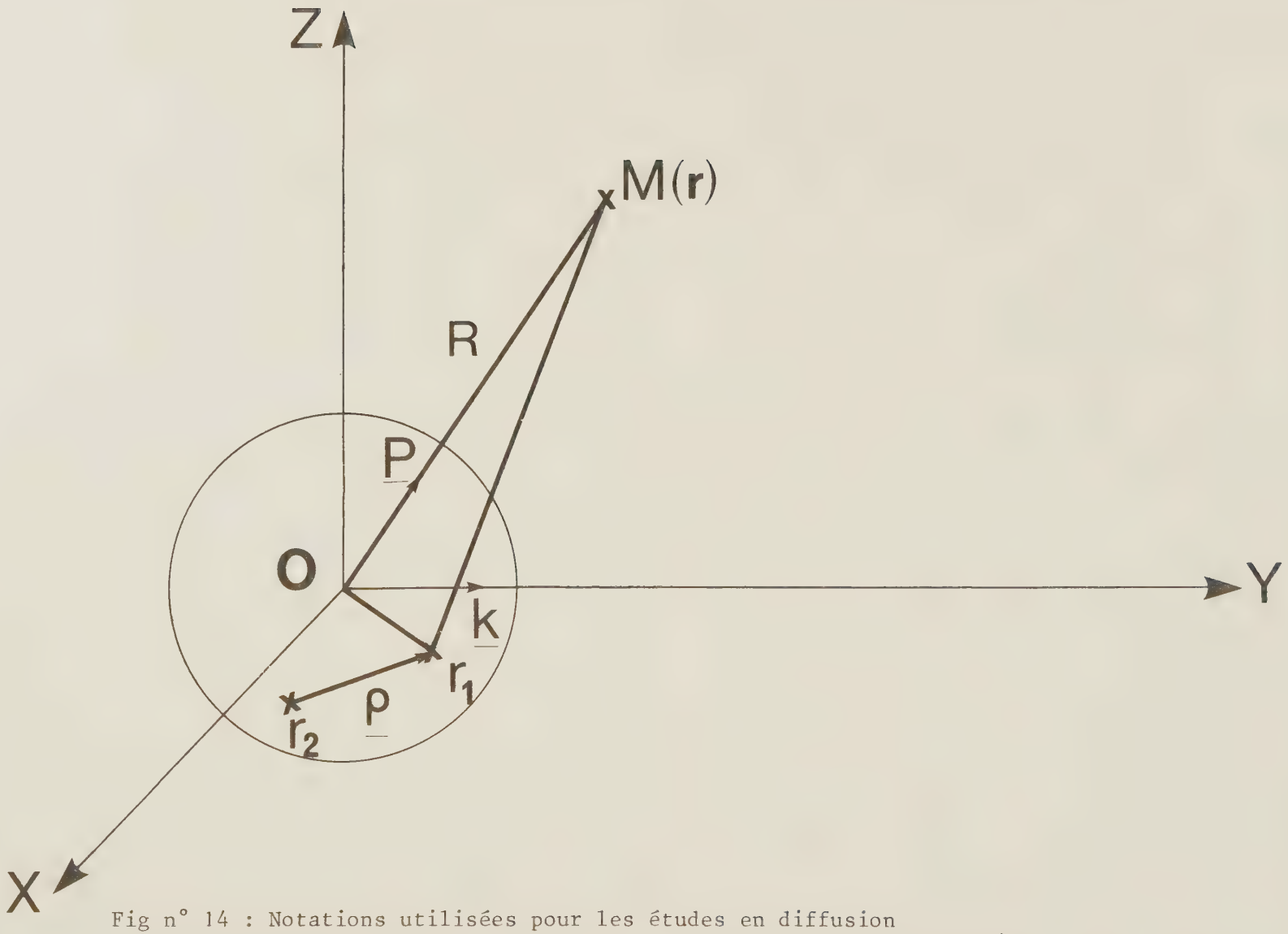



Fig n° 14 : Notations utilisées pour les études en diffusion

O : centre du volume diffusant M(r) point d'observation

$E_{oi}(r)$ est la $i^{ème}$ composante de l'onde incidente non pertubée.
v est le volume diffusant considéré.
L'origine des coordonnées est placée dans le milieu diffusant.
Dans l'équation (30) le second terme du membre de droite représente le processus de diffusion.
Le fait de supposer qu'il s'agit d'une simple diffusion permet de remplacer dans (30)

$$E_k(r_1) \quad \text{par} \quad E_{ok}(r_1)$$

Soit :

$$(31) \quad E_i(r)=E_{oi}(r)-\sum_k \int_V G(r-r_1)C_{ik}(r_1)E_{ok}(r_1)d^3r_1$$

L'onde diffusée latéralement prend donc la forme suivante :

$$(32) \quad E_i^d(r)=-\sum_k \int_V G(r-r_1)C_{ik}(r_1)E_{ok}(r_1)d^3r_1$$

Pour déterminer la polarisation de l'onde diffusée, il est utile de calculer la matrice cohérence $\hat{F}$ de l'onde diffusée, c'est à dire les termes du type :

$$<E_i^d(r)E_j^{d*}(r)> \; = F_{ij}^d(r)$$

Le signe $< \quad >$ signifiant que les quantités sont moyennées sur un ensemble d'échantillons diffusants.

D'après l'équation (32)

$$F_{ij}^d(r)=\sum_k \sum_l \iint_{V\times V} G(r-r_1)G^*(r-r_2) <C_{ik}(r_1)C_{jl}^*(r_2)> E_{ok}(r_1)E_{ol}^*(r_2)d^3r_1d^3r_2$$

Dans le cas d'une onde incidente plane et monochromatique

$$E_{o\,k}= E^o{}_k e^{-i\underline{k}.\underline{r}}$$

$E^o$ étant l'amplitude de l'onde incidente.
Lorsque l'observation se fait à grande distance du volume diffusant, la fonction de Green dans l'approximation de Fraunhofer s'écrit [2]

$$G(r-r_1) \simeq -\frac{1}{4\pi R} e^{ik\underline{P}.\underline{r}_1} e^{-ikR}$$

et

$$G^*(r-r_2) \simeq -\frac{1}{4\pi R} e^{-ik\underline{P}.\underline{r}_2} e^{ikR}$$

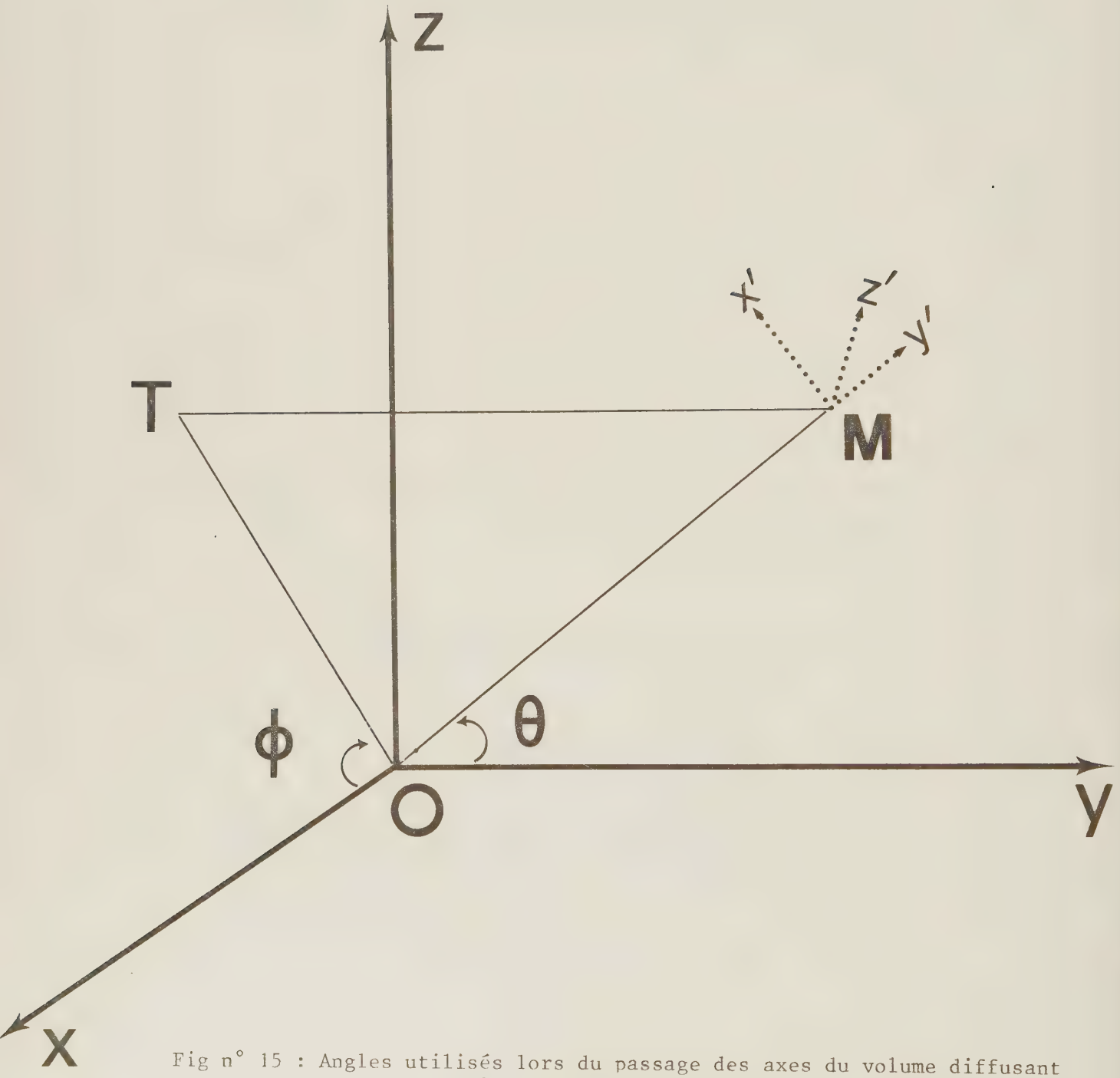



Fig n° 15 : Angles utilisés lors du passage des axes du volume diffusant aux axes de l'observateur.

$\underline{P}$ est un vecteur unitaire porté par OM
$\underline{r_1}$ et $\underline{r_2}$ sont les vecteurs $\underline{OR_1}$ et $\underline{OR_2}$ ($R_1$ et $R_2$ étant deux points du volume diffusant).
R est la distance à l'observateur.
Pour simplifier l'écriture, il est commode de poser :

$$\underline{r_1}-\underline{r_2} = \underline{\rho} \qquad ,\underline{s} = -k\,\underline{P}+\underline{k}$$

et $$F^d_{ij}(r) = \frac{\sum_k \sum_l}{(4\pi R)2} D_{ijkl}\, F^\circ kl\,(r)$$

avec $$F^\circ_{kl}(r) = E^\circ_k\, E^{\circ *}_l$$

avec $$D_{ijkl} = \int_V d^3r_1 \int_V e^{-i\underline{s}\cdot\underline{\rho}} \; < C_{ik}(r_1)\; C^*_{jl}(r_2) > d^3\rho$$

Comme précédemment, l'onde incidente est supposée plane, monochromatique, polarisée transversalement et se propageant dans la direction $\overrightarrow{Oy}$.

De plus, l'orientation respective de la vitesse et du gradient de vitesse est toujours celle représentée par la figure n°3. Donc $\eta$ est uniquement une fonction de x .

Les seuls éléments de $\hat{C}$, non nuls, sont les suivants :

$$Cxz = k^2\eta + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

$$Cyz = ik\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$Czx = k^2\eta$$

ou en écriture matricielle

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2\eta + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -ik\frac{\partial\eta}{\partial x} \\ k^2\eta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'une étude expérimentale, la matrice cohérence serait mesurée dans un système de coordonnées liées à l'onde diffusée ; il faut donc effectuer une rotation des axes de coordonnées. La figure n°15 représente les différentes rotations. Le nouveau vecteur champ électrique est $\underline{E}' = \hat{S}\,\underline{E}$

avec

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\psi & \sin\theta & -\sin\psi\cos\theta \\ \sin\theta\cos\psi & \cos\theta & \sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & -\cos\psi \end{pmatrix}$$

La nouvelle matrice cohérence s'écrit :

(33) $$\hat{F}'^{d} = \hat{S}\,\hat{F}^{d}\,\hat{S}^{*}$$

ou encore :

$$\hat{F}'^{d} = \frac{1}{(4\pi R)^2}\,\hat{S}\,\underline{\underline{D}}\,\hat{F}^{o}\,\hat{S}^{+}$$

$\hat{S}^{+}$ représentant la matrice transposée de $\hat{S}$ puisque cette matrice est réelle c'est à dire que le terme i j de $\hat{F}'^{d}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$F'^{d}_{ij} = S_{ik}\,D_{klmn}\,F^{o}_{mn}\,S_{jl}$$

La forme simplifiée de $\hat{C}$ provoque l'annulation de la plupart des éléments $D_{ijkl}$

Les termes non nuls de $D_{ijkl}$ qui restent sont : $D_{xxzz}$, $D_{xyzz}$, $D_{xzzx}$, $D_{yyzz}$, $D_{yxzz}$, $D_{yzzx}$, $D_{zzxx}$, $D_{zxxz}$ et $D_{zyxz}$.

D'où :

$$F^{d}_{xx} = \frac{F^{o}_{zz}}{(4\pi R)^2}\int_V d^3r_1 \int_V e^{-i\underline{s}\cdot\underline{\rho}} \left\langle \left(k^2\eta + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)_{r_1} \left(k^2\eta + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)_{r_2} \right\rangle d^3\rho$$

$$F^{d}_{yy} = \frac{F^{o}_{zz}}{(4\pi R)^2}\int_V d^3r_1 \int_V e^{-i\underline{s}\cdot\underline{\rho}} \left\langle k^2 \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{r_1} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{r_2} \right\rangle d^3\rho$$

$$F^{d}_{zz} = \frac{F^{o}_{xx}}{(4\pi R)^2}\int_V d^3r_1 \int_V e^{-i\underline{s}\cdot\underline{\rho}}\, k^4 \left\langle \eta_{r_1}\,\eta_{r_2} \right\rangle d^3\rho$$

$$F^{d}_{xy} = -\frac{F^{o}_{zz}}{(4\pi R)^2}\int_V d^3r_1 \int_V e^{-i\underline{s}\cdot\underline{\rho}} \left\langle \left(k^2\eta + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)_{r_1} \left(-ik\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{r_2} \right\rangle d^3\rho = F^{d*}_{yx}$$

$$F^{d}_{xz} = \frac{F^{o}_{zx}}{(4\pi R)^2}\int_V d^3r_1 \int_V e^{-i\underline{s}\cdot\underline{\rho}} \left\langle \left(k^2\eta + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)_{r_1} \left(k^2\eta\right)_{r_2} \right\rangle d^3\rho = F^{d*}_{zx}$$

$$F^{d}_{yz} = \frac{F^{o}_{zx}}{(4\pi R)^2}\int_V d^3r_1 \int_V e^{-i\underline{s}\cdot\underline{\rho}} \left\langle -ik^3\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{r_1} (\eta)_{r_2} \rangle\, d^3\rho = F^{d*}_{zy}$$

Pour calculer le vecteur de Stokes correspondant à l'onde diffusée, il est nécessaire de connaître

$F'^{d}_{xx}$ , $F'^{d}_{zz}$ , $F'^{d}_{xz}$

Le développement de l'équation (33) fournit les relations suivantes :

(34) $$F'^{d}_{xz} = \cos^2\phi \cos^2\theta F^{d}_{xz} + \sin^2\theta F^{d}_{yy} + \sin^2\phi \cos^2\theta F^{d}_{zz}$$
$$- \sin\theta\cos\theta\cos\phi (F^{d}_{xy} + F^{d*}_{xy}) + \cos\phi \sin\phi \cos^2\theta (F^{d}_{xz} + F^{d*}_{xz})$$
$$- \sin\theta\cos\theta \sin\phi (F^{d}_{yz} + F^{d*}_{yz})$$

(35) $$F'^{d}_{xz} = F'^{d*}_{zx} = \cos\phi \sin\phi \cos\theta (F^{d}_{zz} - F^{d}_{xx}) + \cos\theta\cos^2\phi F^{d}_{xz} +$$
$$\sin\theta \sin\phi F^{d*}_{xy} - \sin\theta\cos\phi F^{d}_{yz} - \sin^2\phi\cos\theta F^{d*}_{xz}$$

(36) $$F'^{d}_{zz} = \sin^2\phi F^{d}_{xx} + \cos^2\phi F^{d}_{zz} - \sin\phi\cos\phi (F^{d}_{xz} + F^{d*}_{xz})$$

Les composantes du vecteur de Stokes de l'onde diffusée reliées aux éléments de la matrice cohérence par :

$$I'^{d} = F'^{d}_{xx} + F'^{d}_{zz}$$

$$M'^{d} = F'^{d}_{xx} - F'^{d}_{zz}$$

$$C'^{d} = F'^{d}_{xz} + F'^{d}_{zx}$$

$$S'^{d} = i[F'^{d}_{xz} - F'^{d}_{zx}]$$

prennent les expressions suivantes :

(37) $$I'^{d} = (\cos^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi) F^{d}_{xx} + \sin^2\theta F^{d}_{yy} + (\sin^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi) F^{d}_{zz}$$
$$- \sin\theta\cos\theta\cos\phi (F^{d}_{xy} + F^{d*}_{xy}) - \cos\phi\sin\phi\sin^2\theta (F^{d}_{xz} + F^{d*}_{xz})$$
$$- \sin\theta\cos\theta\sin\phi (F^{d}_{yz} + F^{d*}_{yz})$$

(38) $$M'^{d} = (\cos^2\phi\cos^2\theta - \sin^2\phi) F^{d}_{xx} + \sin^2\theta F^{d}_{yy} + (\sin^2\phi\cos^2\theta - \cos^2\phi) F^{d}_{zz}$$
$$- \sin\theta\cos\theta\cos\phi (F^{d}_{xy} + F^{d*}_{xy}) + \cos\phi\sin\phi (1 + \cos^2\theta)(F^{d}_{xz} + F^{d*}_{xz}) - \sin\theta\cos\theta\sin\phi (F^{d}_{yz} + F^{d*}_{yz})$$

(39) $$C'^{d} = \cos\phi \sin\phi \cos\theta (2F^{d}_{zz} - 2F^{d}_{xx}) + \sin\theta \sin\phi (F^{d}_{xy} + F^{d*}_{xy})$$
$$- \sin\theta\cos\phi (F^{d}_{yz} + F^{d*}_{yz}) + \cos\theta (\cos^2\phi - \sin^2\phi)(F^{d}_{xz} + F^{d*}_{xz})$$

(40) $$S'^{d} = i\left[\sin\theta \sin\phi (F^{d}_{xy} - F^{d*}_{xy}) - \sin\theta\cos\phi (F^{d}_{yz} - F^{d*}_{yz}) + \cos\theta (F^{d}_{xz} - F^{d*}_{xz}) \right.$$

### III.1.2 CAS PARTICULIER DE LA DIFFUSION A 90°

Dans le cas particulier de la diffusion à 90°, c'est à dire lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\psi$ est quelconque, les expressions se simplifient notablement :

Les équations (34), (35), (36) prennent les formes suivantes :

$$F'^{d}_{xx} = F^{d}_{yy}$$

$$F'^{d}_{xz} = F'^{d*}_{zx} = \sin\phi\, F^{d*}_{xy} - \cos\phi\, F^{d}_{yz}$$

$$F'^{d}_{zz} = \sin^2\phi\, F^{d}_{xx} + \cos^2\phi\, F^{d}_{zz} - \sin\phi\cos\phi\,(F^{d}_{xz} + F^{d*}_{xz})$$

Les équations (37), (38), (39) et (40) se simplifient aussi :

$$(41)\quad I'^{d} = \sin^2\phi\, F^{d}_{xx} + F^{d}_{yy} + \cos^2\phi\, F^{d}_{zz} - \sin\phi\cos\phi\,(F^{d}_{xz} + F^{d*}_{xz})$$

$$(42)\quad M'^{d} = -\sin^2\phi\, F^{d}_{xx} + F^{d}_{yy} - \cos^2\phi\, F^{d}_{zz} + \sin\phi\cos\phi\,(F^{d}_{xz} + F^{d*}_{xz})$$

$$(43)\quad C'^{d} = \sin\phi\,(F^{d*}_{xy} + F^{d}_{xy}) - \cos\phi\,(F^{d}_{yz} + F^{d*}_{yz})$$

$$(44)\quad S'^{d} = i\,(F^{d*}_{xy} - F^{d}_{xy}) - \cos\phi\,(F^{d}_{yz} - F^{d*}_{yz})$$

Si maintenant, on suppose que le volume diffusant est petit de telle sorte que le gradient de vitesse puisse être considéré comme constant à l'intérieur de ce volume, les éléments de la matrice cohérence de l'onde diffusée, dans les anciens axes prennent une forme simplifiée

$$F^{d}_{xx} = \eta^2 \frac{F^{o}_{zz}}{(4\pi R)^2} \int_V d^3r_1 \int_V e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}\, k^4\, d^3\rho$$

$$F^{d}_{zz} = \eta^2 \frac{F^{o}_{xx}}{(4\pi R)^2} \int_V d^3r_1 \int_V e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}\, k^4\, d^3\rho$$

$$F^{d}_{xz} = \eta^2 \frac{F^{o}_{zx}}{(4\pi R)^2} \int_V d^3r_1 \int_V e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}\, k^4\, d^3\rho = F^{d*}_{zx}$$

$$F^{d}_{yy} = F^{d}_{xy} = F^{d}_{yx} = F^{d}_{yz} = F^{d}_{zy} = 0$$

Si l'angle $\theta$ vaut $\frac{\pi}{2}$, les composantes du vecteur $\underline{s}$ se simplifient,

$s_x=-k\cos\psi \qquad s_y=k \qquad s_z=-k\sin\psi$

Calculons l'intégrale :

$$J = \eta^2 \int_V d^3r_1 \int_V \bar{e}^{\underline{s}\cdot\underline{\rho}}\, k^4\, d^3\rho$$

en développant $\bar{e}^{i\underline{s}\cdot\underline{\rho}}$

$$J = k^4\eta^2 V \int_{-\mathcal{R}_0/2}^{\mathcal{R}_0/2} e^{ik\cos\phi\, x}\, dx\, e^{-iky}\, dy\, e^{ik\sin\phi\, z}\, dz$$

$$J = \frac{8k\eta^2 V}{\cos\phi\sin\phi}\sin\frac{k\cos\phi\,\mathcal{R}_0}{2}\sin\frac{k\,\mathcal{R}_0}{2}\sin\frac{k\sin\phi\,\mathcal{R}_0}{2}$$

$\mathcal{R}$ représente le rayon du volume diffusant.

Les composantes du vecteur de Stokes de l'onde diffusée, dans les nouveaux axes, peuvent s'écrire sous la forme simplifiée :

$$I'^d = \frac{J}{(4\pi R)^2}[\sin^2\phi\, F^o_{zz} + \cos^2\phi\, F^o_{xx} - \sin\phi\cos\phi\,(F^o_{zx} + F^{o*}_{zx})]$$

$M'^d = -I'^d$

$C'^d = 0$

$S'^d = 0$

Si l'on veut caractériser le milieu diffusant par une matrice de Mueller, il est commode d'exprimer $I'^d$ $M'^d$ $C'^d$ et $S'^d$ en fonction des composantes du vecteur de Stokes de la lumière incidente $I_o$ $M_o$ $C_o$ $S_o$
Ceci donne :

$$I'^d = \frac{J}{(4\pi R)^2}\left[\frac{I_o}{2} + \frac{M_o}{2}\cos 2\phi - \frac{C_o}{2}\sin 2\phi\right]$$

$M'^d = -I'^d$

$C'^d = 0$

$S'^d = 0$

La matrice de Mueller prend donc la forme suivante, très simple :

$$\hat{M} = M_1 \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\phi & -\sin 2\phi & 0 \\ -1 & -\cos 2\phi & +\sin 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $$M_1 = \frac{\mathcal{J}}{2(4\pi R)^2}$$

la lumière diffusée est donc toujours polarisée linéairement.

## III.2 DIFFUSION D'UNE ONDE PLANE PAR DES FLUCTUATIONS ISOTROPES DE n

### III.2.1 EQUATION DU PROBLEME

Le vecteur champ électrique se propageant dans un milieu où l'indice de réfraction subit des fluctuations aléatoires, isotropes, dues par exemple à des fluctuations thermiques, obéit à l'équation [2]

(45) $$(\Delta + k^2)\underline{E} = -2\,\underline{\mathrm{grad}}(\underline{E}.\underline{\mathrm{grad}}\ \mathrm{Log}(1+\nu)) - 2k^2\nu\underline{E}$$

$\nu(r)$ étant une fonction aléatoire qui décrit les fluctuations spatiales de l'indice de réfraction, elle reste toujours très petite devant 1.

L'équation (45) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$(\Delta + k^2)\underline{E} = -2\hat{L}\underline{E}$$

avec :

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} k^2\nu + \frac{\partial^2\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\nu}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial z} + \frac{\partial\nu}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} & k^2\nu + \frac{\partial^2\nu}{\partial y^2} + \frac{\partial\nu}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2\nu}{\partial y\partial z} + \frac{\partial\nu}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial z} + \frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial^2\nu}{\partial y\partial z} + \frac{\partial\nu}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} & k^2\nu + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} + \frac{\partial\nu}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En introduisant la fonction de Green G comme dans le paragraphe III.1 et en gardant les mêmes notations :

$$E_i(r)=E_{oi}(r)-2\sum_k \int_V G(r-r_1)L_{ik}E_k(r_1)d^3r_1$$

En ne considérant toujours que la diffusion latérale au 1er ordre, on peut remplacer $E_k(r_1)$ par $E_{ok}(r_1)$ dans le terme intégral.

La matrice cohérence prend la forme suivante :

$$\langle E_i^d(r) E_j^{d*}(r)\rangle = 4\sum_k\sum_\ell \iint_{V\times V} G(r-r_1)G^*(r-r_2)\langle L_{ik}(r_1)L^*_{j\ell}(r_2)\rangle E_{ok}(r_1)E_{o\ell}(r_2)d^3r_1 d^3$$

qui peut s'écrire plus simplement (cf. figure n°14)

(46) $$\langle E_i^d(r) E_j^{d*}(r)\rangle = F_{ij}^d(r) = \frac{4V}{(4\pi R)^2}\sum_k\sum_\ell \int_V d^3\rho\, e^{-i\underline{s}\cdot\rho}\langle L_{ik}(r_1)L^*_{j\ell}(r_1-\rho)\rangle F^\circ_{k\ell}(r)$$

Si les conditions d'observation sont les mêmes qu'au chapitre précédent :
- l'observateur est placé latéralement par rapport au faisceau incident
- le faisceau incident est une onde plane monochromatique transverse se propageant selon l'axe $\overline{Oy}$ qui n'a pas de dépendance en x et en z :

$$\underline{E}_o(r)=\underline{E}^\circ e^{ik\,y}$$

la matrice $\hat{L}$ prend une forme simplifiée :

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} k^2\nu + \dfrac{\partial^2\nu}{\partial x^2} & 0 & \dfrac{\partial^2\nu}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial^2\nu}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial\nu}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial^2\nu}{\partial y\partial z} + \dfrac{\partial\nu}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\nu}{\partial x\partial z} & 0 & k^2\nu + \dfrac{\partial^2\nu}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

En supposant que la fonction de corrélation des fluctuations de l'indice de réfraction est gaussienne de variance $\langle \nu^2 \rangle$, $l$ étant la longueur de corrélation des fluctuations, sa transformée de Fourier peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\Gamma}(s) = \frac{8\pi\langle \nu^2\rangle\, l^3}{(1 + k^2 l^2 \sin^2\theta/2)}$$

cette transformée de Fourier étant définie de la façon suivante :

(47) $$\tilde{\Gamma}(s) = \int_V d^3\rho\; e^{i\underline{s}\cdot\rho}\langle \nu(r_1)\,\nu(r_1-\rho)\rangle$$

en utilisant les propriétés des transformées de Fourier, on voit que :

$$i s_x \tilde{\Gamma}(s) = \int_V d^3\rho\, e^{-i\vec{s}\cdot\vec{\rho}} \left\langle \frac{\partial \nu(r_1)}{\partial x} \cdot \nu(r_1-\rho) \right\rangle$$

et

$$-i s_x \tilde{\Gamma}(s) = \int_V d^3\rho\, e^{-i\vec{s}\cdot\vec{\rho}} \left\langle \nu(r_1) \cdot \frac{\partial \nu(r_1-\rho)}{\partial x} \right\rangle$$

Les composantes de s étant : $s_x = -k \sin\theta \cos\psi$

$$s_y = k\,(1 - \cos\theta)$$

$$s_z = -k \sin\theta \sin\psi$$

Les termes de la matrice cohérence prennent la forme suivante :

$$F^d_{xx} = \frac{4V}{(4\pi R)^2} \int_V d^3\rho\, e^{-i\vec{s}\cdot\vec{\rho}} \left( F^\circ_{xx} \langle L_{xx}(r_1) L^*_{xx}(r_1-\rho)\rangle + F^\circ_{33} \langle L_{x3}(r_1) L^*_{x3}(r_1-\rho)\rangle + F^\circ_{x3} \langle L_{xx}(r_1) L^*_{x3}(r_1-\rho)\rangle + F^\circ_{3x} \langle L_{x3}(r_1) L^*_{xx}(r_1-\rho)\rangle \right.$$

que l'on peut écrire :

$$F^d_{xx} = \frac{4V}{(4\pi R)^2} \tilde{\Gamma}(s) \left[ F^\circ_{xx}(k^2 - s_x^2)^2 + F^\circ_{33} s_x^2 s_3^2 - (F^\circ_{x3} + F^{\circ *}_{x3})(k^2 - s_x^2) s_x s_3 \right]$$

$$F^d_{33} = \frac{4V}{(4\pi R)^2} \tilde{\Gamma}(s) \left[ F^\circ_{xx}(s_x s_3)^2 + F^\circ_{33}(k^2 - s_3^2)^2 - (F^\circ_{x3} + F^{\circ *}_{x3})(k^2 - s_3^2) s_x s_3 \right]$$

$$F^d_{x3} = \frac{4V}{(4\pi R)^2} \tilde{\Gamma}(s) \left[ -F^\circ_{xx}(k^2 - s_x^2) s_x s_3 - F^\circ_{33} s_x s_3 (k^2 - s_3^2) + F^\circ_{x3}(k^2 - s_x^2)(k^2 - s_3^2) + F^{\circ *}_{x3} s_x^2 s_3^2 \right]$$

$$F^d_{yy} = \frac{4V}{(4\pi R)^2} \tilde{\Gamma}(s) \left[ F^\circ_{xx}(s_x s_y - k s_x)^2 + F^\circ_{33}(s_3 s_y - k s_3)^2 + (s_x s_y^2 s_3 + k^2 s_x s_3 - 2k s_x s_y s_3)(F^\circ_{x3} + F^{\circ *}_{x3}) \right]$$

$$F^d_{xy} = \frac{4V}{(4\pi R)^2} \tilde{\Gamma}(s) \left[ F^\circ_{xx}(-s_x s_y + k s_x)(s_x^2 - k^2) + F^\circ_{33}(s_x s_3)(s_y s_3 - k s_3) + F^\circ_{x3}(-k^2 s_y s_3 + s_x^2 s_y s_3 + k^3 s_3 - k s_x^2 s_3) + F^{\circ *}_{x3}(s_x^2 s_y s_3 - k s_x^2 s_3 \right.$$

$$F^d_{y3} = \frac{4V}{(4\pi R)^2} \tilde{\Gamma}(s) \left[ F^\circ_{xx}(s_x^2 s_y s_3 - k s_x^2 s_3) + F^\circ_{33}(-s_y s_3 + k s_3)(k^2 - s_3^2) + F^\circ_{x3}(-s_x s_y + k s_x)(k^2 - s_3^2) + F^{\circ *}_{x3}(s_x s_3)(s_y s_3 - k s_3) \right]$$

Les composantes du vecteur de Stokes étant mesurées dans un système de coordonnées liées à l'onde diffusée il faut effectuer un changement de coordonnées et l'on retrouve les équations (37)(38) (39) et (40) qui relient les composantes du vecteur de Stokes dans les nouveaux axes aux termes de la matrice cohérence dans les anciens axes.

Les calculs étant longs et fastidieux, il est préférable de rechercher, à priori, les symétries et les simplifications correspondant au cas précis que l'on désire traiter.

### III.2.2 CAS PARTICULIER DE LA DIFFUSION A 90°

La valeur de $\theta$ est alors égale à 90° ce qui permet d'importantes simplifications dans les équations fournissant, d'une part les composantes du vecteur de Stokes en fonction des éléments de la matrice cohérence de l'onde diffusée (dans les anciens axes), ce qui conduit aux équations (41) (42) (43) et (44), d'autre part ces mêmes éléments de la matrice cohérence en fonction des éléments de la matrice cohérence de l'onde incidente.

En effet, on a alors : $s_x=-k\cos\phi \qquad s_y=k \qquad s_z=-k\sin\phi$

$$F^d_{xx} = \frac{4Vk^4}{(4\pi R)^2}\tilde{F}(s)\left[F^o_{xx}\sin^4\phi + F^o_{zz}\sin^2\phi\cos^2\phi - (F^o_{xz}+F^{o*}_{xz})\sin^3\phi\cos\phi\right]$$

$$F^d_{zz} = \frac{4Vk^4}{(4\pi R)^2}\tilde{F}(s)\left[F^o_{xx}\cos^2\phi\sin^2\phi + F^o_{zz}\cos^4\phi - (F^o_{xz}+F^{o*}_{xz})\cos^3\phi\sin\phi\right]$$

$$F^d_{xz} = \frac{4Vk^4}{(4\pi R)^2}\tilde{F}(s)\left[-F^o_{xx}\sin^3\phi\cos\phi - F^o_{zz}\cos^3\phi\sin\phi + (F^o_{xz}+F^{o*}_{xz})\cos^2\phi\sin^2\phi\right]$$

$$F^d_{yy} = F^d_{xy} = F^d_{yz} = 0$$

Ce qui permet d'exprimer simplement :

$I'^d$ $M'^d$ $C'^d$ et $S'^d$ en fonction de $F^\circ_{xx}$, $F^\circ_{zz}$, $F^\circ_{xz}$

$$I'^d = \frac{4Vk^4 \tilde{\Gamma}(s)}{(4\pi R)^2} \left[F^\circ_{xx}\sin^2\phi + F^\circ_{zz}\cos^2\phi - (F^\circ_{xz}+F^{\circ *}_{xz})(\sin\phi\cos\phi)\right]$$

$$M'^d = -I'^d$$

$$C'^d = 0$$

$$S'^d = 0$$

Pour déduire facilement la matrice de Mueller du volume diffusant, on exprime $I'^d$ et $M'^d$ en fonction de $I_o$, $M_o$, $C_o$ et $S_o$

$$I'^d = \frac{4Vk^4 \tilde{\Gamma}(s)}{2(4\pi R)^2} (I_o - M_o \cos 2\phi - C_o \sin 2\phi)$$

$$M'^d = -I'^d$$

$$C'^d = S'^d = 0$$

D'où

$$\hat{M} = M_2 \begin{pmatrix} 1 & -\cos 2\phi & -\sin 2\phi & 0 \\ -1 & +\cos 2\phi & +\sin 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $M_2 = \frac{2 V k^4 \tilde{\Gamma}(s)}{(4\pi R)^2}$ avec $\tilde{\Gamma}(s) = \frac{8\pi \langle \nu^2 \rangle \ell^3}{\left[1 + \frac{k^2\ell^2}{2}\right]}$

Ici aussi, la lumière diffusée est toujours polarisée rectilignement.

## III.3 CONCLUSION

Dans le cas de la diffusion due aux fluctuations thermiques du milieu, l'onde diffusée à 90° est polarisée rectilignement, et son intensité varie comme $k^4/1+Ck^2$. Par contre, dans le cas de la diffusion due à l'écoulement du milieu, la lumière est toujours polarisée rectilignement mais son intensité suit une loi compliquée en fonction de k.

L'étude qui va être rapportée dans le chapitre IV montre la possibilité de détecter un gradient de vitesse et de déterminer localement son ordre de grandeur à l'intérieur d'un fluide en mouvement.

Pour cela, on suppose que le processus de diffusion est semblable à celui d'une diffusion Rayleigh c'est à dire que la diffusion latérale est équivalente, au point de vue polarisation, à un analyseur dont l'axe de transmission ferait un angle de $\pi/2$ avec la direction de diffusion.

Dans le cas d'un gaz, la diffusion Rayleigh est bien évidemment prépondérante puisque chaque molécule joue le rôle d'un diffuseur et que les molécules étant indépendantes, leurs effets de diffusion s'ajoutent.

Dans le cas d'un solide, on sait que la diffusion Rayleigh est nulle car toutes les molécules étant figées, leurs diffusions peuvent toujours s'annuler deux par deux.

Le cas des liquides est plus complexe surtout lorsqu'ils incorporent des éléments dissouts. L'annexe III compare les ordres de grandeur des différentes diffusions possibles et résume les résultats expérimentaux obtenus par Pindera et Krishnamurthy avec différentes solutions de "milling yellow".

# IV. METHODE UTILISEE EN POLARIMETRIE BIDIMENSIONNELLE [25]

## IV.1 INTRODUCTION

De nombreux systèmes utilisés pour mesurer la polarisation sont basés sur la modulation de la lumière à analyser. En effet, le fait de moduler permet d'atteindre un rapport signal sur bruit plus élevé en éliminant la majorité des bruits à basse fréquence, gain particulièrement marqué lorsque l'adjonction d'une référence de phase conduit à la "détection synchrone". Le choix du système de modulation doit obéir à plusieurs critères : faible bruit, grande pupille d'entrée pour minimiser les erreurs causées par un éventuel déplacement du faisceau, bande passante suffisamment large.

Pour les études expérimentales prévues, les polarimètres devaient être capables de fonctionner jusqu'à une fréquence de 1 KHZ ce qui imposait aux modulateurs d'atteindre au minimum 10 KHZ.

De nombreux polarimètres [23] utilisent un analyseur tournant. Le principal avantage est le traitement très simple du signal, puisque, en général il suffit de placer un filtre passe bas et un filtre passe haut centrés sur une fréquence double de la fréquence de rotation. Cependant leurs inconvénients sont nombreux. La fréquence de rotation est faible (en général pour des raisons mécaniques : à l'intérieur d'un moteur à axe creux, on place soit un morceau de polaroïd, soit un prisme polarisant), les effets de vibration ne sont pas négligeables, le moindre déplacement latéral du faisceau provoque d'importantes erreurs.

De plus, en général, ces polarimètres comportent des lames $\lambda/4$ ou $\lambda/2$ qui limitent la précision, particulièrement lorsque le faisceau est large, ou lorsque sa position n'est pas fixe, puisque ces lames ne sont jamais homogènes sur toute leur surface.

Un autre inconvénient est le chromatisme de ces lames, bien que de gros progrès aient été faits ces dernières années [26].

Pour éviter ces désavantages, nous avons étudié puis réalisé au laboratoire un Stokesmètre qui utilise des éléments piezo-optiques permettant une modulation de polarisation à haute fréquence et présentant en outre une grande pupille d'entrée et une large ouverture [27].

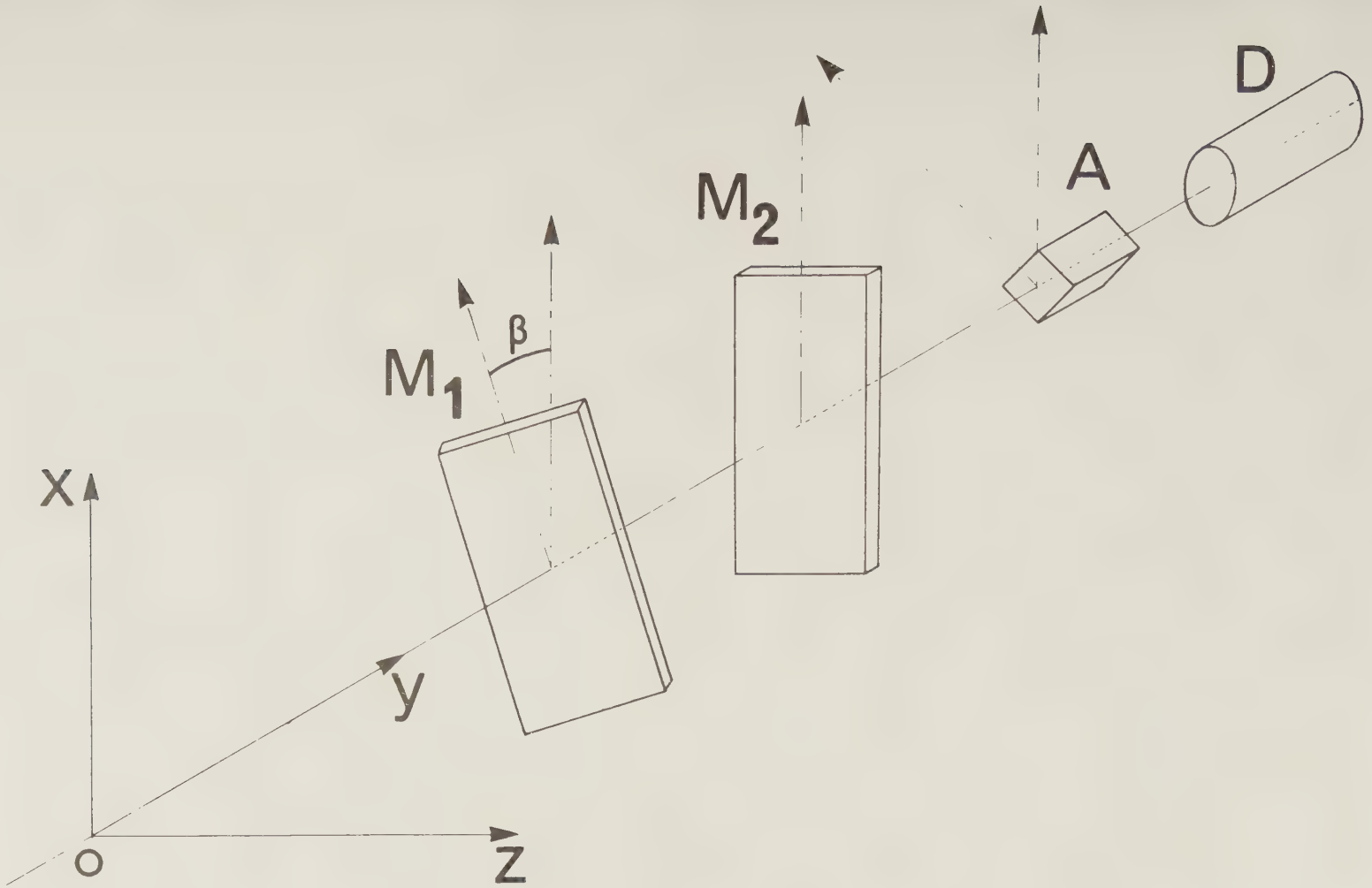



Fig. n° 16 - Schéma de principe du polarimètre utilisé

La lumière se propage selon l'axe des y.

$M_1$ - $M_2$ : modulateurs photoélastiques ; A : analyseur : D : détecteur.

## IV.2 MESURE RAPIDE DES COMPOSANTES DU VECTEUR DE STOKES

La figure n°16 [28] schématise le montage expérimental réalisé.

La lumière à analyser se propage le long de l'axe Oy, traverse deux modulateurs $M_1$ et $M_2$ de fréquences respectives $\omega_1$ et $\omega_2$. L'axe rapide de $M_1$ fait un angle $\beta$, fixe, avec l'axe des x , l'axe rapide de $M_2$ est parallèle à l'axe Ox. Un analyseur A fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe des x, D représente le détecteur.
Chacun de ces éléments peut être caractérisé par sa matrice de Mueller.
Pour A :

$$\hat{A} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $M_1$ :

$$\hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta \cos\varphi & + \sin 4\beta \sin^2 \varphi/2 & \sin 2\beta \sin\varphi \\ 0 & + \sin 4\beta \sin^2 \varphi/2 & \sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta \cos\varphi & -\cos 2\beta \sin\varphi \\ 0 & - \sin 2\beta \sin\varphi & + \cos 2\beta \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Si $\varphi$ est le déphasage introduit par le modulateur $M_1$.

Pour $M_2$ :

$$\hat{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si $\theta$ est le déphasage introduit par le modulateur $M_2$

$$\theta = \theta_o \sin \omega_2 t \qquad \text{et} \qquad \varphi = \varphi_o \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

Le vecteur de Stokes $\underline{V}$ =[I M C S] de la lumière reçue par le détecteur se déduit de celui de la lumière incidente $\underline{V_o}$ = [$I_o$ $M_o$ $C_o$ $S_o$] par la relation suivante :

$$\underline{V_1} = \hat{A}\ \hat{M}_2\ \hat{M}_1\ \underline{V_o}$$

On ne s'intéresse, en fait, qu'à l'intensité de la lumière donc à la première composante du vecteur $\underline{V}$

$$I = \frac{1}{2}\left( I_0 + M_0\left( \sin 4\beta \cos\theta \sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin 2\beta \sin\theta \sin\varphi \right) - S_0 \sin\theta \cos\right.$$

$$+ C_0\left(-\cos 2\beta \sin\varphi \sin\theta + \sin^2 2\beta \cos\theta + \cos^2 2\beta \cos\varphi \cos\theta\right) - S_0(\cos 2\beta \sin\varphi \cos\theta)\Big)$$

en remplaçant $\theta$ et $\varphi$ par leurs valeurs en fonction du temps.

(47) $2I = I_0$

$$+ M_0\left(\frac{1}{2}\sin 4\beta \cos(\theta_0 \sin\omega_2 t)(1 - \cos(\varphi_0 \sin(\omega_1 t+\alpha))) + \sin 2\beta \sin(\theta_0 \sin\omega_2 t)\right.$$
$$\left.\sin(\varphi_0 \sin(\omega_1 t+\alpha))\right)$$

$$+ C_0\left(-\cos 2\beta \sin(\varphi_0 \sin(\omega_1 t+\alpha)) \sin(\theta_0 \sin\omega_2 t) + \sin^2 2\beta \cos(\theta_0 \sin\omega_2 t) + \cos^2 2\beta \cos(\theta_0 \sin\omega_2 t)\right.$$
$$\left.\cos(\varphi_0 \sin(\omega_1 t+\alpha))\right)$$

$$- S_0\left(\cos 2\beta \sin(\varphi_0 \sin(\omega_1 t+\alpha)) \cos(\theta_0 \sin\omega_2 t) + \sin(\theta_0 \sin\omega_2 t) \cos(\varphi_0 \sin(\omega_1 t+\alpha))\right)$$

On connaît les développements :

$$\cos(z \sin x) = J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos 2kx$$

et $$\sin(z \sin x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z) \sin[(2k+1)x]$$

L'équation (47) contient des termes périodiques de la forme :

$$\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\ (\theta_0 \sin\omega_2 t)x \qquad \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}\ (\varphi_0 \sin(\omega_1 t+\alpha))$$

ce qui revient à des termes périodiques

$$\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\ p\omega_2 t \quad \times \quad \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\ q(\omega_1 t+\alpha)$$

donc à des termes tels que

$$\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\ p\omega_2 t \pm q(\omega_1 t+\alpha)$$

p et q étant des entiers.

Seules les amplitudes sont intéressantes, on peut donc négliger la différence de phase $\alpha$. Posons, k étant un nombre irrationnel $k\omega_1 = \omega_2$ ; de plus pour simplifier, $\theta_o$ et $\varphi_o$ sont choisis racine de la fonction de Bessel $J_o(z)$ donc $J_o(\theta_o)$ et $J_o(\varphi_o)$ sont nulles.

Les relations utilisées dans l'équation (47) sont :

(48) $$\cos(\theta_o \sin\omega_2 t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\theta_o)\cos 2nk\omega_1 t$$

(49) $$\cos(\theta_o \sin\omega_2 t)\cos(\varphi_o \sin\omega_1 t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_{2n}(\theta_o)J_{2m}(\varphi_o)[\cos 2\omega_1 t(kn+m) + \cos 2\omega_1 t(-kn+m)]$$

(50) $$\sin(\theta_o \sin\omega_2 t)\sin(\varphi_o \sin\omega_1 t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} J_{2n+1}(\theta_o)J_{2m+1}(\varphi_o)[\cos\omega_1 t(2nk+k-2m-1) - \cos\omega_1 t(2nk+k+2m+1$$

(51) $$\sin(\varphi_o \sin\omega_1 t)\cos(\theta_o \sin\omega_2 t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(\theta_o)J_{2n+1}(\varphi_o)[\sin\omega_1 t(2n+1+2mk) - \sin\omega_1 t(-2n-1+2mk)$$

(52) $$\cos(\varphi_o \sin\omega_1 t)\sin(\theta_o \sin\omega_2 t) = 2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\varphi_o)J_{2m+1}(\theta_o)[-\sin\omega_1 t(-2n+k(-2m+1) + \sin\omega_1 t(2mk-k-2n)]$$

k étant irrationnel, $\theta_o$ et $\varphi_o$ étant racines de $J_o(z)$, les termes périodiques ci-dessus n'ont pas de parties communes.
Il s'agit maintenant de faire des mesures à plusieurs fréquences différentes de manière à retrouver les composantes $I_o$ $M_o$ $C_o$ et $S_o$.
Aux plus faibles valeurs d'indice des fonctions de Bessel correspondent les plus grands coefficients, on choisira donc n et m petits.
La partie continue de I se réduit à $I_o/2$
Sur la fréquence $2k\omega_1$ ce qui impose n = 1 dans l'équation (48) on recueille :

$$\frac{1}{2} J_2(\theta_o)[M_o \sin 4\beta + 2C_o \sin^2 2\beta]$$

Sur la fréquence $2(k+1)\omega_1$ et sur la fréquence $2(-k+1)\omega_1$ ce qui impose n=1 et m=1 dans l'équation (49). On recueille :

$$\frac{1}{2} J_2(\theta_o) J_2(\varphi_o)[2C_o \cos^2 2\beta - M_o \sin 4\beta]$$

sur la fréquence $(2k-1)\omega_1$ ce qui impose dans (51) m=1 et n=0 on recueille :

$$J_2(\varphi_o)J_1(\theta_o)\cos 2\beta\ S_o$$

Afin de simplifier au maximum les relations, le meilleur choix pour $\beta$ est $\pi/8$ ce qui entraîne :

$\sin 4\beta = 1 \qquad \sin 2\beta = \cos 2\beta = \sqrt{2}/2$

Si l'on appelle $D_1$ $D_2$ $D_3$ $D_4$ les valeurs affichées respectivement sur les détecteurs centrés sur les fréquences $0, 2k\omega_1$, $2\omega_1$ $(1 \pm k)$ et $\omega_1(2k-1)$ se réduisent à :

$$D_1 = I_o/2$$

$$D_2 = \frac{1}{2} J_2(\theta_o)[M_o + C_o]$$

$$D_3 = \frac{1}{2} J_2(\theta_o) J_2(\varphi_o)[C_o - M_o]$$

$$D_4 = J_1(\theta_o) J_2(\varphi_o) \cos 2\beta \; S_o$$

Par ailleurs, la condition $J_o(\theta_o) = J_o(\varphi_o) = 0$ impose $\theta_o = \varphi_o = 2{,}405$ rd

En final, on obtient donc les relations très simples :

(53)
$$D_1 = 0{,}500 I_o$$
$$D_2 = 0{,}215(M_o + C_o)$$
$$D_3 = 0{,}092(C_o - M_o)$$
$$D_4 = 0{,}158 S_o$$

$I_o$ et $S_o$ sont donc mesurés directement tandis que $M_o$ et $C_o$ apparaissent par leur somme et par leur différence.
On peut relier $M_o$ $C_o$ et $S_o$ aux paramètres $\gamma$ et $\zeta$ habituellement utilisés pour caractériser une lumière elliptique, $\gamma$ représentant l'arc dont la tangente est l'ellipticité et $\zeta$ l'azimuth du grand axe de l'ellipse.

(54)
$$\gamma = 0.5 \arcsin \frac{S_o}{\sqrt{M_o^2 + C_o^2 + S_o^2}} \quad \text{et}$$

(55)
$$\zeta = 0.5 \operatorname{arc\,tg} \frac{C_o}{M_o}$$

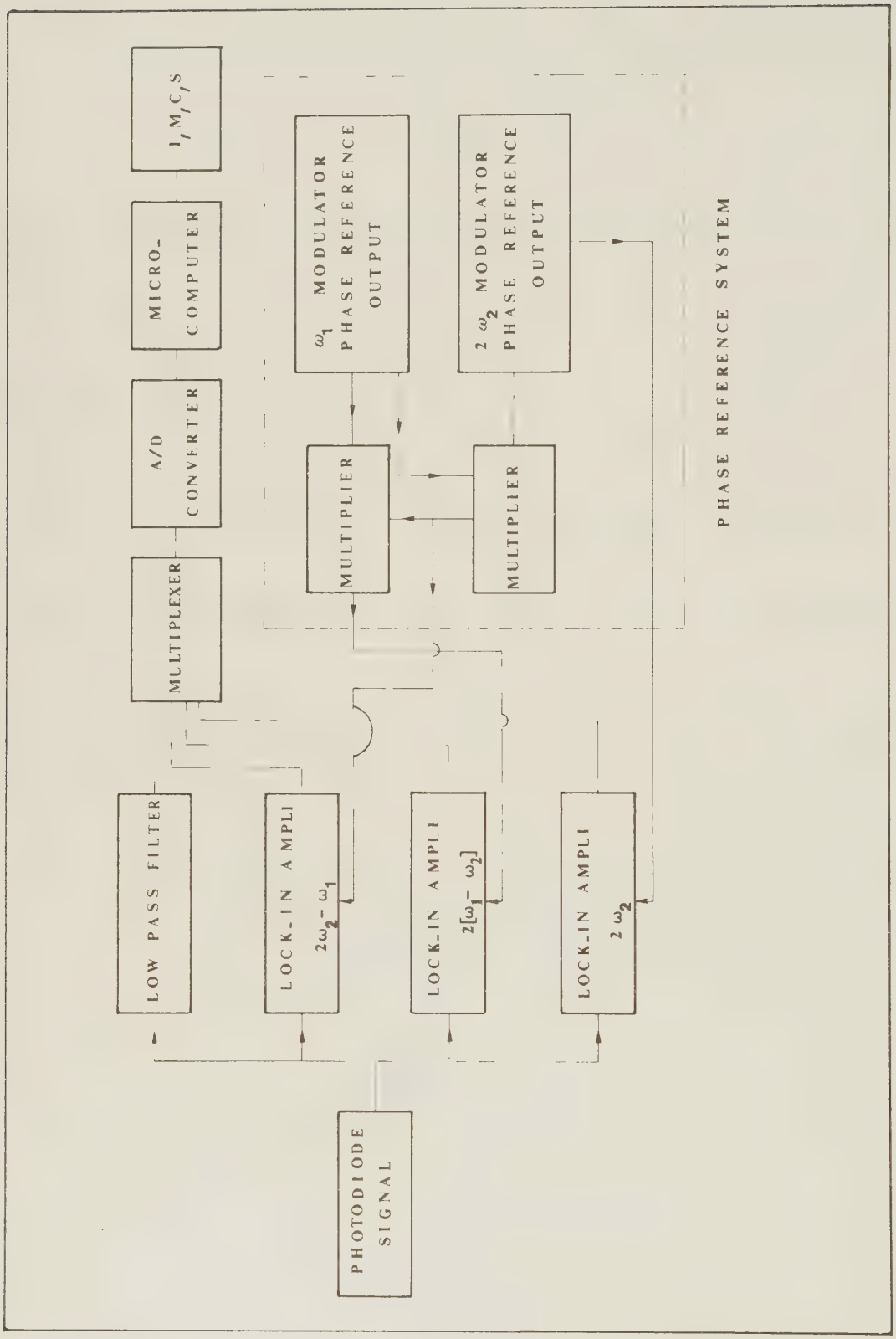



Fig. n° 17 - Synoptique du système de traitement du signal.

Fig. 18 - Partie optique du Stokesmètre

D'autre part le degré de polarisation P peut s'écrire :

$$P=\frac{(M_o^2+C_o^2+S_o^2)^{1/2}}{I_o}$$

La figure n°17 représente le schéma électronique utilisé, les valeurs $D_1$ $D_2$ $D_3$ et $D_4$ sont traitées automatiquement par un microordinateur.

## IV.3 MONTAGE EXPERIMENTAL

La source de lumière est un laser He-Ne ( $\lambda$ = 6328Å)
Les modulateurs sont deux modulateurs photoélastiques MORVUE dont les fréquences sont respectivement $\omega_1$ = 74,878 KHZ et $\omega_2$ = 50,177 KHZ, revêtus de couches anti-reflets.
L'analyseur est un prisme de Glan-Taylor. Le détecteur est une photodiode P-I-N 5LC de UDT. La figure n°18 montre le polarimètre avec les deux modulateurs faisant un angle de $\pi/8$, l'analyseur dans une monture permettant une rotation et la photodiode dans une monture permettant deux translations perpendiculaires.
Trois amplificateurs synchrones PAR mesurent $D_2$ $D_3$ et $D_4$.
Ces trois mesures plus celle de $D_1$ en continu sont reçues par un système d'acquisition de données ECTRON 6000 puis traitées par un calculateur Hewlett-Packard 9825A.
Lorsque l'on travaille en temps réel, il faut 20 msec pour acquérir et calculer les 4 composantes d'un vecteur de Stokes.

## IV.4 FILTRAGE

Les trois fréquences de travail sont :

$$2k\ \omega_1,\ 2(-k+1)\ \omega_1 \text{ et } (2k-1)\ \omega_1$$

Compte tenu des valeurs de k et $\omega_1$, on trouve les valeurs numériques suivantes :

$$\nu_1 = 100,354 \text{ KHZ}$$

$$\nu_2 = 49,402 \text{ KHZ}$$

$$\nu_3 = 25,476 \text{ KHZ}$$

mais il est bien évident d'après les développements (48) à (52) qu'il existe de nombreuses autres fréquences du type :

$$\pm p\,\omega_2 \pm q\,\omega_1$$

Les trois fréquences ci-dessus ont été choisies parce qu'elles étaient assez éloignées des fréquences parasites que l'on pouvait donc filtrer. Plus p et q augmentent, plus les coefficients qui font intervenir des termes en
$J_p(\theta_o)$ et $J_q(\varphi_o)$ sont petits, on se limite donc
à p et $q \leqslant 6$

Pour $\nu_1$ = 100,354 KHZ : 99,579 ($2\omega_1 - \omega_2$) ;
101,129 KHZ ($5\omega_2 - 2\omega_1$)

Pour $\nu_2$ = 49,402 KHZ : 48,627 KHZ ($-5\omega_2 + 4\omega_1$)

Pour $\nu_3$ = 25,476 KHZ : 24,701 KHZ ($\omega_1 - \omega_2$) ;
26,251 KHZ ($5\omega_2 - 3\omega_1$)

Les résultats ci-dessus ont été controlés à l'aide d'un analyseur de spectre.
Lorsque l'analyseur est centré sur 25,476 KHZ, on voit un signal parasite à 24,701 KHZ dont l'amplitude est du même ordre de grandeur mais la raie est assez éloignée pour qu'un filtre l'élimine.
Lorsque l'analyseur est centré sur 49,402 KHZ les raies voisines ont des amplitudes beaucoup plus faibles.
Enfin lorsque l'analyseur est centré sur 100,354 KHZ, la seule raie voisine dont l'amplitude est comparable à la raie que l'on veut étudier est celle à 99,579 KHZ qu'il faut donc éliminer avec un filtre approprié.

## IV.5 PRECISION

Le principal facteur qui limite la précision est le convertisseur analogique digital qui ne comporte que 12 bits.
En inversant les relations (53), on peut calculer
$I_o$ $M_o$ $C_o$ $S_o$ en fonction de $D_1$ $D_2$ $D_3$ $D_4$

$$I_o = 2 D_1$$

$$M_o = 2{,}32 D_2 - 5{,}43 D_3$$

$$C_o = 2{,}32 D_2 + 5{,}43 D_3$$

$$S_o = 6{,}33 D_4$$

On peut calculer $\Delta\gamma$ et $\Delta\zeta$ à partir des relations (54) et (55)

$$\Delta\zeta \leqslant \frac{|(D_2 + D_3)\Delta D|}{C_o^2 + M_o^2} \times 3{,}16$$

en supposant que $\Delta D \simeq 1/2$ , le calcul (pour une lumière elliptique fixée) fournit $|\Delta\zeta| \leqslant 12$ secondes d'arc, la manipulation donnait $|\Delta\zeta| \leqslant 6$ secondes d'arc.
La différenciation de $\gamma$ permet d'écrire :

$$|\Delta\gamma| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{M_o^2+C_o^2}}[|6{,}33(M_o^2 + C_o^2)| + |2{,}32\ S_o(M_o+C_o)| + |5{,}43(M_o-C_o)|]\frac{|\Delta D|}{M_o^2+C_o^2+S_o^2}$$

pour une lumière elliptique identique à celle utilisée ci-dessus on trouve :

$$|\Delta\gamma| \leqslant 80 \text{ secondes d'arc}$$

Expérimentalement, pour une lumière linéaire
$|\Delta\gamma| \leqslant 10$ secondes d'arc, pour une lumière circulaire
$|\Delta\gamma| \leqslant 80$ secondes d'arc.
Les ordres de grandeur sont donc bien respectés.
D'autre part, pour déterminer la précision du système, il est aussi possible de mesurer la matrice de Mueller d'un "élément nul".
La matrice doit être la matrice identité, elle est déterminée de la façon suivante :

On choisit 4 polarisations incidentes différentes fixes auxquelles correspondent les vecteurs de Stokes $(\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3, \underline{V}_4)$, on mesure ces vecteurs à l'instant t puis à l'instant $t+\Delta t$ ; chaque mesure est intégrée sur 1 seconde.

On peut alors calculer la matrice associée à "l'élément nul"
On trouve que les éléments diagonaux sont égaux à $1 \pm 3.10^{-3}$ et les éléments non diagonaux valent $\pm 3.10^{3}$, on peut donc supposer qu'une matrice sera mesurée avec une précision d'environ$\pm 3.10^{-3}$.

## IV.6 PUISSANCE EQUIVALENTE AU BRUIT

N mesures sont effectuées successivement, les écarts quadratiques moyens relatifs à l'azimuth $\gamma$ et à l'ellipticité $\zeta$ sont calculés ; les temps d'intégration pour chaque mesure varient de 0.1 à 10 secondes.
Le tableau n°1 reproduit ci-dessous récapitule quelques résultats caractéristiques. Il est évident que la constante de temps des amplificateurs synchrones détermine le signal qui peut être mesuré avec un rapport signal sur bruit égal à l'unité et que le système d'acquisition de données ne peut pas augmenter cette limite.

| NOMBRE D'ECHANTILLONS | TEMPS D'INTEGRATION (s) | POLARISATION | | |
|---|---|---|---|---|
| | | CIRCULAIRE | LINEAIRE | |
| | | $\sigma_\zeta$ ($\lambda$) | $\sigma_\gamma$ sec d'arc | $\sigma_\zeta$ ($\lambda$) |
| 100 | 0.1 | $2.10^{-5}$ | 13 | $3.10^{-5}$ |
| 100 | 1 | $4.10^{-6}$ | 10 | $2.10^{-6}$ |
| 1000 | 10 | $3.10^{-6}$ | 12 | $2.10^{-7}$ |

## IV.7 CONCLUSION

Le système décrit ci-dessus permet de faire des mesures de haute précision en un temps très court, ce qui est particulièrement intéressant lorsque l'on étudie un phénomène évolutif. La dépolarisation peut être déterminée en même temps que $\gamma$ et $\zeta$ puisque les quatre composantes du vecteur de Stokes sont connues. Cependant si les changements subis par la polarisation de la lumière varient le long du trajet, la méthode ci-dessus ne décrit qu'un effet de moyenne. Dans ce cas, il faut utiliser un système tridimensionnel.

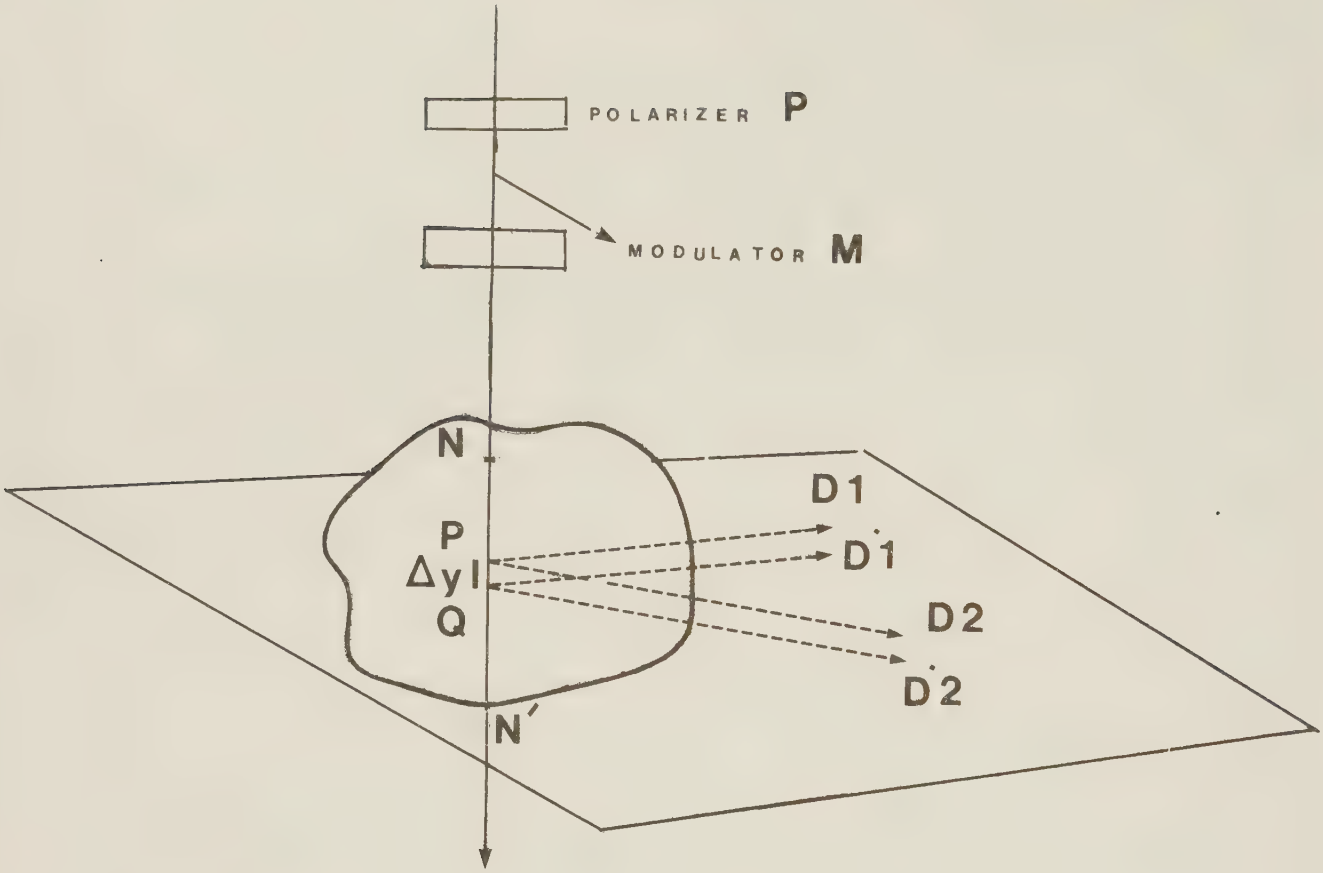



Fig n° 19 : Principe de la méthode utilisée

# V. METHODE UTILISEE EN POLARIMETRIE TRIDIMENSIONNELLE

## V.1 INTRODUCTION

La méthode proposée est applicable lorsque le milieu est optiquement transparent et lorsque la lumière diffusée suit la loi de Rayleigh en ce qui concerne la polarisation.

Comme pour l'ellipsométrie bi-dimensionnelle, les mesures peuvent être faites très rapidement. On pourra donc utiliser cette méthode pour des études en dynamique des fluides, à condition d'utiliser des fluides présentant une biréfringence d'écoulement. Le but est la connaissance du biréfringent élémentaire d'un volume dV centré autour du point P (Cf. figure N°19).

La lumière incidente traverse le polariseur P, ce qui définit la direction de référence, un modulateur photoélastique M dont les axes principaux sont à $\pi/4$ de la direction de référence, puis le milieu d'étude depuis le point N jusqu'au point N', ce milieu est composé d'une suite de biréfringents élémentaires dont les axes et les retards sont quelconques, il est donc équivalent à un biréfringent non linéaire.

## V.2 RELATION ENTRE L'INTENSITE MESUREE ET LA MATRICE DE MUELLER DU MILIEU

Soit un volume élémentaire $\Delta V$ limité par les points P et Q. La lumière diffusée issue de ces deux points émise dans les directions $D_1$ parallèle à la direction de référence et $D_2$ direction à $\pi/4$ de la direction de référence est collectée par deux objectifs de microscope qui forment l'image de P sur les détecteurs $D_1$ et $D_2$ et l'image de Q sur les détecteurs $D'_1$ et $D'_2$.

Soit $\underline{R}_o$ le vecteur de Stokes de la lumière issue du polariseur

$\hat{M}$ la matrice de MUELLER correspondant au modulateur

$\hat{A}(y)$ la matrice du biréfringent correspondant au trajet NP

$\hat{A}(y+\Delta y)$ la matrice associée au trajet NQ

$\hat{B}(y)$ la matrice associée au trajet élémentaire $\Delta y$

$\hat{D}$ la matrice correspondant au processus de diffusion.

Etant donné l'hypothèse faite d'une diffusion Rayleigh, c'est la matrice d'un polariseur linéaire.
$\underline{R}_1$ $\underline{R}'_1$, $\underline{R}_2$ $\underline{R}'_2$ sont les vecteurs de Stokes caractérisant la lumière reçue par les différents détecteurs.

$$\underline{R}_o = I_o \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\xi & 0 & -\sin\xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\xi & 0 & \cos\xi \end{pmatrix} \qquad \hat{D}_1 = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D}_2 = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{A}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^2+G^2-E^2-F^2 & 2(DE+FG) & 2(DF-EG) \\ 0 & 2(DE-FG) & G^2+E^2-F^2-D^2 & 2(DG+EF) \\ 0 & 2(DF+EG) & 2(EF-DG) & F^2+G^2-E^2-D^2 \end{pmatrix}$$

avec $\xi = \xi_o \sin \omega t$

Le vecteur $\underline{R}_1$ est relié au vecteur $\underline{R}_o$ par la relation matricielle suivante :

(56) $$\underline{R}_1 = \hat{D}_1 \hat{A}(y) \hat{M} \underline{R}_o$$

On ne s'intéresse en fait qu'à la première composante de $\underline{R}_1$ qui représente l'intensité collectée. En appliquant la relation (56), on trouve :

$$I_1 = \frac{I_o}{2}(1+(D^2+G^2-E^2-F^2)\cos\xi + 2(DF-EG)\sin\xi)$$

de même $$I_2 = \frac{I_o}{2}(1+2(DE-FG)\cos\xi + 2(DG+EF)\sin\xi)$$

Pour simplifier l'écriture on pose :

$$D^2+G^2-E^2-F^2 = A_{22}$$

$$2(DF-EG) = A_{24}$$

$$2(DE-FG) = A_{32}$$

$$2(DG+EF) = A_{34}$$

Puis on développe cos $\xi$ et sin $\xi$ en fonction de $\omega$, $2\omega$ etc... comme dans les équations (48) à (52), en choisissant $J_o(\xi_o) = 0$ pour simplifier

(57) $$I_1 = \frac{I_o}{2}\left[1 + 2A_{22}\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\xi_o)\cos 2k\omega t + 2A_{24}\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\xi_o)\sin(2k+1)\omega t\right]$$

(58) $$I_2 = \frac{I_o}{2}\left[1 + 2A_{32}\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\xi_o)\cos 2k\omega t + 2A_{34}\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\xi_o)\sin(2k+1)\omega t\right]$$

## V.3 PRINCIPE DE MESURE

En filtrant les intensités sur les fréquences 0, $\omega$, et $2\omega$ on recueille respectivement :

| | fréquence 0 | fréquence $\omega$ | fréquence $2\omega$ |
|---|---|---|---|
| $I_1$ | $I_o/2$ | $2A_{24}I_oJ_1(\xi_o)$ | $2A_{22}I_oJ_2(\xi_o)$ |
| $I_2$ | $I_o/2$ | $2A_{34}I_oJ_1(\xi_o)$ | $2A_{32}I_oJ_2(\xi_o)$ |

$\hat{A}(y)$ étant une matrice unitaire, elle est formée de vecteurs lignes et de vecteurs colonnes unitaires et orthogonaux. On peut donc retrouver tous les éléments de la matrice $\hat{A}(y)$ à partir de $A_{24}$ $A_{34}$ $A_{22}$ et $A_{32}$ :

$$A_{23}=\pm(1-A_{22}^2 - A_{24}^2)^{1/2}$$

$$A_{33}=-(A_{24}A_{34}+A_{22}A_{32})/A_{23}$$

$$A_{43}=(A_{24}A_{32} - A_{22}A_{34})$$

$$A_{42}=-(A_{22}A_{23} + A_{32}A_{33})/A_{43}$$

$$A_{44}=-(A_{22}A_{24} + A_{32}A_{34})/A_{42}$$

Puisque le signe de $A_{23}$ est indéterminé, il y a deux familles de solutions : $\hat{A}^+(y)$ et $\hat{A}^-(y)$.

Les deux détecteurs $D'_1$ et $D'_2$ fourniront eux les éléments de la matrice $\hat{A}(y+\Delta y)$ il y aura là encore 2 familles de solutions $\hat{A}^+(y+\Delta y)$ et $\hat{A}^-(y+\Delta y)$

La matrice $\hat{B}(y)$ est reliée aux matrices $\hat{A}$ par la relation

$$\hat{A}(y+\Delta y)=\hat{B}(y)\hat{A}(y) \qquad (59)$$

En remarquant que $\hat{A}$ est une matrice orthogonale : $\hat{A}^{-1}=\hat{A}^t$
donc (59) peut s'écrire $\hat{B}(y)=\hat{A}(y+\Delta y)\hat{A}^t(y)$

On trouve donc ainsi 4 solutions pour $\hat{B}(y)$
Mais, puisque $\hat{B}(y)$ correspond à un volume élémentaire, elle doit représenter un biréfringent linéaire ce qui impose des relations entre les divers éléments de $\hat{B}(y)$. Une simulation numérique montre qu'il n'y a que 2 solutions qui vérifie ces relations. Les deux matrices qui conviennent représentent le même biréfringent au signe près.

$\hat{B}(y)$ s'écrit sous la forme générale d'un biréfringent linéaire.

$$\hat{B}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D'^2+G'^2-E'^2 & 2\,D'E' & -2\,E'G' \\ 0 & 2\,D'E' & G'^2+E'^2-D'^2 & 2\,D'G' \\ 0 & 2\,E'G' & -2\,D'G' & 2\,G'^2-1 \end{pmatrix}$$

Si $\delta'$ représente le retard introduit par ce biréfringent M' et C' la deuxième et la troisième composante du vecteur de Stokes caractérisant l'axe rapide

$$D'=M'\sin \delta'/2 \; ; \; E'=C'\sin \delta'/2 \; ; \; G'=\cos \delta'/2$$

Connaissant les différents éléments de $\hat{B}(y)$, il est facile de calculer M', C' et $\delta'$ (qui sera connu au signe près).

## V.4 PRECISION

Pour déterminer la précision du système, on peut mesurer la matrice de MUELLER correspondant à une lame 1/4 d'onde intercalée entre le modulateur M et le point N. En faisant tourner la 1/4 d'onde dans son plan ce qui provoque une rotation des axes principaux, des écarts apparaissent entre les vraies valeurs et les mesures du retard $\delta'$ et de l'azimuth $\theta'$ des axes principaux. Ces écarts restent toujours inférieurs au degré.

La résolution spatiale du système dépend de l'ouverture du système optique qui collecte la lumière diffusée. Elle peut être ajustée lors de chaque expérience en fonction de la précision recherchée, de la diffusivité du fluide étudié, du type de détecteur utilisé etc...

# VI. MESURE D'UN GRADIENT DE VITESSE PONCTUEL A L'INTERIEUR D'UN FLUIDE

## VI.1 INTRODUCTION

Le but de cette étude était la mise au point d'une méthode expérimentale qui permettrait de mesurer de manière instantanée des biréfringents correspondant à de très petits volumes.

En appliquant ce principe à un fluide présentant de la biréfringence d'écoulement, il devient possible de détecter des gradients de vitesse locaux et même de mesurer certaines composantes du gradient de vitesse.

Pour des fluides gazeux (où la majorité des molécules sont allongées) comme l'air par exemple, il a été montré, théoriquement et expérimentalement, au cours du chapitre II, qu'il existait un effet de biréfringence d'écoulement qui était très faible.

$\delta$ , la différence de phase entre deux modes de propagation est proportionnelle à la longueur de fluide traversée par le faisceau lumineux et au coefficient de biréfringence constant $\beta$ caractéristique du fluide ; pour détecter des gradients locaux, il est préférable d'utiliser un liquide, ceux-ci présentant une biréfringence d'écoulement plus importante que celle des gaz.

Après avoir rappelé rapidement les théories de la biréfringence d'écoulement dans les liquides et après avoir montré comment la connaissance du biréfringent permettait de calculer certaines composantes du gradient de vitesse, une manipulation de faisabilité a été montée. Le but étant de montrer que la théorie proposée était applicable, l'écoulement d'un colorant dissous dans l'eau ("milling-yellow") à l'intérieur d'un cylindre de Couette (mouvement connu théoriquement et expérimentalement) a été étudié et plusieurs résultats ont été retrouvés en transmission et en diffusion ce qui prouve le bien fondé de la méthode.

## VI.2 THEORIES DE LA BIREFRINGENCE D'ECOULEMENT DANS LES LIQUIDES POUR DES PARTICULES RIGIDES [31]

### VI.2.1 HISTORIQUE

Les premières observations de biréfringence d'écoulement dans les liquides ont été faites par Mach [32] en 1873 sur des liquides très visqueux tels que le baume du Canada.

Maxwell [12] décrit la même année des expériences similaires mais c'est Kundt [33] qui fait les premières mesures quantitatives et qui propose la théorie suivante : le liquide considéré étant en rotation entre deux cylindres concentriques, il est soumis à des contraintes le long de deux directions orthogonales, à 45° des lignes de courant, ces contraintes sont proportionnelles à la viscosité dynamique du fluide $\zeta$ et au gradient de vitesse g. Ces contraintes provoquent un effet de biréfringence comme dans un solide, proportionnel au module des contraintes. De nombreux écarts à cette théorie furent trouvés expérimentalement. Les théories qui vont suivre ont été développées dans le cas d'un écoulement dans l'entrefer de deux cylindres tournants.

En 1928, Raman et Krishnan, [34] propose une théorie qui suppose que le liquide est formé ou contient des particules très asymétriques qui sont optiquement anisotropes.

La biréfringence est due à un équilibre entre l'agitation thermique et l'orientation de la plus grande dimension de la molécule parallèlement à la direction de la tension.

L'angle d'extinction $\chi$ (angle entre la ligne de courant et l'axe optique du biréfringent équivalent) est toujours égal à 45° quelque soit la valeur du gradient de vitesse.

La biréfringence $\Delta n$ prend la forme :

$$\Delta n = [M]\, n\, \zeta\, g$$

[M] est appelé la constante de Maxwell du liquide

Là encore, de grosses différences apparaissent entre la théorie proposée et les résultats expérimentaux.

Des théories plus complètes furent élaborées séparant en particulier le cas des particules rigides de celui des particules déformables. Nous ne nous intéresserons qu'au premier cas, le liquide utilisé pouvant se classer dans cette catégorie.

### VI.2.2 THEORIE DE HALLER [35]

Les particules supposées asymétriques (ellipsoides de révolution, cylindres) prennent une orientation due à l'écoulement et au mouvement brownien. Pour calculer cette orientation, Haller définit au moyen d'une équation différentielle une fonction de distribution F qui donne la répartition des particules entre les différentes positions, en écrivant que, pour un état stationnaire, la variation de F due à la diffusion brownienne est opposée à la variation de F due au mouvement du fluide.

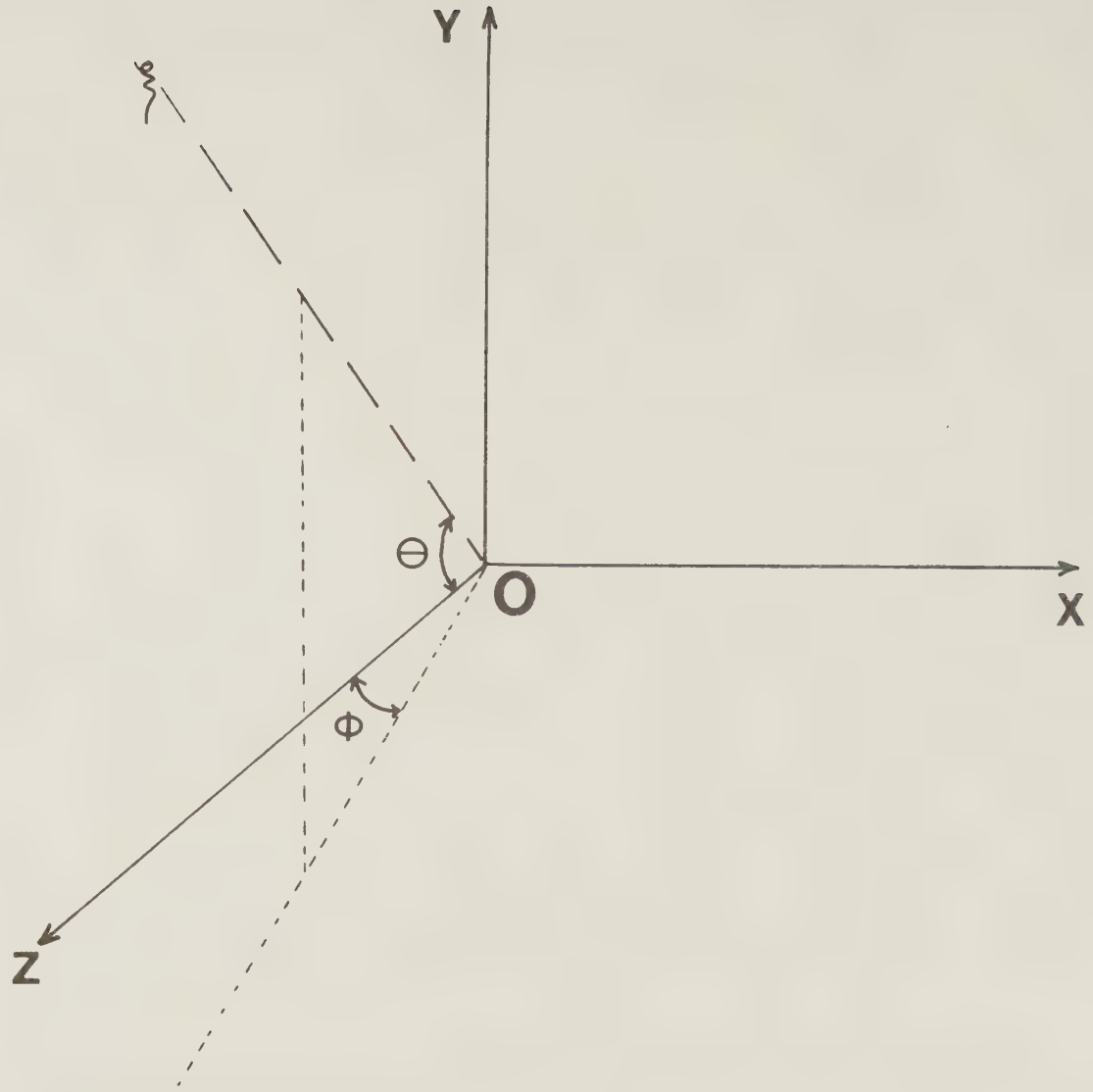



Fig n° 20 : Définition des angles caractérisant la position de la molécule dans l'écoulement. La vitesse est dirigée suivant $\vec{Ox}$, le gradient de vitesse suivant $\vec{Oy}$, le grand axe de la molécule suivant $\vec{O\xi}$

L'équation différentielle peut être résolue lorsque l'agitation thermique est faible et les gradients élevés ou lorsque l'agitation est forte et les gradients faibles.

On trouve que $\chi$ varie de 45° à 0° lorsque le gradient augmente (ce qui est en accord avec l'expérience) et que la biréfringence augmente avec le gradient jusqu'à une limite correspondant à la complète orientation des particules.

### VI.2.3 THEORIE DE BOEDER [36]

Les hypothèses sont les mêmes que ci-dessus, Boeder s'est interessé principalement au problème bi-dimensionnel. L'équation différentielle sur F est intégrée dans trois domaines de $\sigma = \frac{g}{D}$ ; D : constante de diffusion rotatoire de la particule.

Les particules qui sont des ellipsoïdes de révolution étant soumises à un champ électrique extérieur $\underline{E}$ qui produit un champ intérieur $\underline{E}_i$, chaque particule est polarisée par induction ; soit $\underline{P}_p$ la polarisation du liquide

$$\underline{P}_p = \Sigma \underline{\underline{p}}\ \underline{E}_i \quad \text{et} \quad p_{ij} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F \alpha_{ij}(\psi,\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\psi$$

La figure n°20 visualise les deux angles d'orientation $\theta$ et $\psi$ de la particule, $O\xi$ est la direction du grand axe de l'ellipsoïde, $\overrightarrow{Ox}$ la direction de l'écoulement, $\overrightarrow{Oy}$ la direction du gradient de vitesse ; $\alpha$ représente la polarisabilité de la particule.
Les vitesses de rotation $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ sont différentes de celles proposées par Haller.
En appliquant la relation de Lorenz-Lorentz :

$$\underline{E}_i = \underline{E} + \frac{4\pi}{3} \underline{P}_p$$

et en écrivant que $\underline{E} + 4\pi \underline{P}_p = \underline{\underline{\epsilon}}\ \underline{E}$ $\underline{\underline{\epsilon}}$ étant le tenseur dielectique du milieu

Il aboutit aux relations suivantes :

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{K}{H} \qquad \Delta n = \Pi \sqrt{H^2 + K^2} = \Pi f(\sigma, b)$$

avec $H = \int_0^{2\pi} F \cos 2\psi \, d\psi$ $\qquad K = \int_0^{2\pi} F \sin 2\psi \, d\psi$

$\Pi$ est un facteur optique qui dépend de la polarisabilité des particules.

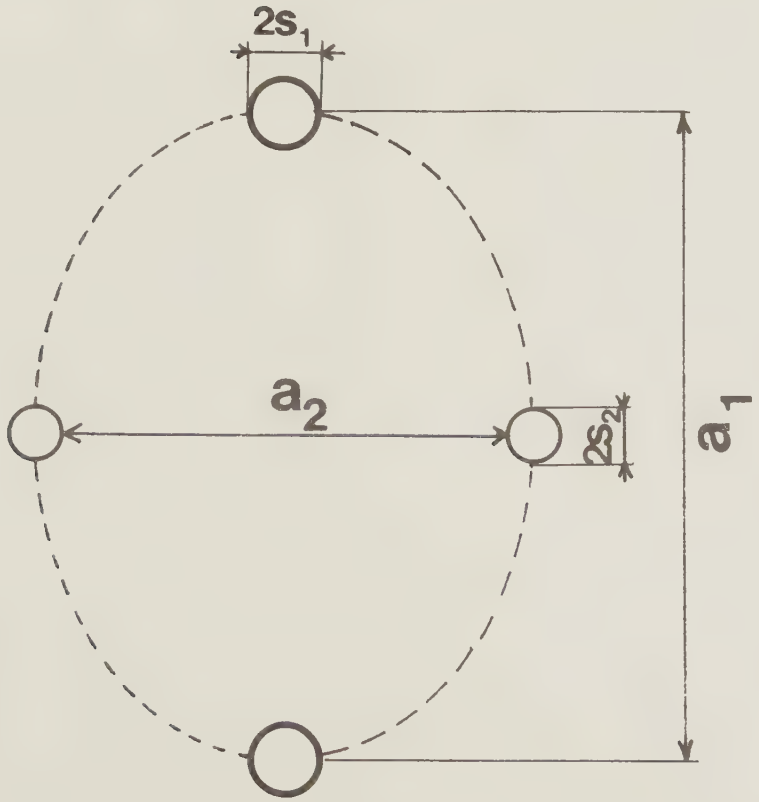



Fig. n° 21 : Modèle moléculaire utilisé par W. Kühn

$$b = \frac{a^2{}_1 - a^2{}_2}{a^2{}_1 + a^2{}_2}$$

$a_1$ et $a_2$ étant les longueurs des 1/2 axes de l'ellipsoïde.

f ($\sigma$,b) est appelé le facteur d'orientation.
Les valeurs de $\chi$ et f ($\sigma$,b) sont calculées numériquement en fonction de $\sigma$ .
En tridimensionnel et pour les faibles valeurs de $\sigma$ :

$$\chi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{6}{\sigma} \quad \text{et} \quad f(\sigma, b) = \frac{\sigma \pi}{10}$$

Dans la plupart des cas, $\chi$ varie avec le gradient de vitesse et $\Delta n$ n'est proportionnelle au gradient de vitesse que pour de faibles valeurs de celui-ci.

### VI.2.4 THEORIE DE KUHN [37].

La méthode de traitement et les résultats sont très proches de ceux de Boeder ; Kühn cependant traite en plus le cas de molécules qui ont un rapport axial petit (le rapport axial est défini par $r = a_1/a_2$)

Les molécules sont considérées comme des ensembles de petites sphères (cf figure n°21).

#### VI.2.4.1 PARTICULE ELLIPTIQUE - RAPPORT AXIAL FAIBLE

Pour de grosses particules $D \simeq 0$, F est indépendant de g ;

$$\chi = 0 \text{ et } \Delta n = N_p(H_1 - H_2) \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \; ; \; N_p(H_1 - H_2) = \Delta n_{sat}$$

$\Delta n_{sat}$ est la valeur limite de la biréfringence obtenue lorsque toutes les particules sont complètement orientées. $N_p$ est le nombre de particules par unité de volume.

Pour de petites particules D est grand.

$$\Delta n = \Delta n_{sat} \frac{3 \pi \zeta_o}{2 K_B T} g \quad (a_1^2 s_1 - a_2^2 s_2)$$

$K_B$ : cte de Boltzmann
T : température

et $\chi$ décroit de 45° à 0° quand le gradient augmente.

### VI.2.4.2 PARTICULE ELLIPTIQUE - RAPPORT AXIAL ELEVE

Pour des valeurs moyennes ou élevées de $\sigma$ , il reprend les équations de Boeder et trouve que $\chi = 0$ et $\Delta n = \Delta n_{sat}$

Pour des valeurs faibles de $\sigma$ : $\chi = 45°$ et $\Delta n = \Delta n_{sat} \frac{\pi g \zeta_o l^3}{64 K_B T}$

l : longueur de la particule.

Ceci devrait permettre la connaissance de l à partir de mesures de $\Delta n$ mais le fait de traiter le problème à deux dimensions alors qu'il est à 3 dimensions fausse les résultats.

### VI.2.5 THEORIE DE SADRON [38]

Sadron suppose que les particules rigides en solution se comportent comme l'a admis Boeder mais pour décrire leur mouvement, il utilise les équations de Jeffery [39].

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ la vitesse de rotation $\omega_\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}$ prend la forme :

$$\omega_\psi = \frac{g\, a_1{}^2 \cos^2\psi + a_2{}^2 \sin^2\psi}{a_1{}^2 + a_2{}^2}$$

Dans le cas bi-dimensionnel, en posant $b = \frac{a^2{}_1 - a^2{}_2}{a^2{}_1 + a^2{}_2}$
F prend la forme:

$$F = \frac{N_p}{\pi} \left(1 + \frac{b\sigma}{4} \sin 2\psi\right)$$

Pour les faibles valeurs du gradient de vitesse, l'angle d'extinction $\chi$ est donné par l'équation :

$$\operatorname{tg} 2\chi = \text{Cte} \times \frac{g}{D}$$

Les théories précédentes étaient incorrectes dans la mesure où le champ interne était supposé isotrope ; Sadron fut le premier à remédier à cette erreur en introduisant un champ anisotrope ; il appliqua la méthode de Lorenz à un volume de forme ellipsoïdale de dimensions identiques à celles de la molécule.

Si $\underline{E}$ est le champ électrique incident, les polarisations produites sont

$$P_i = (P_o)_i + (P_p)_i$$

qui sont respectivement les polarisations relatives aux particules en suspension et aux molécules du solvant.

Le champ interne ayant la forme générale $(\underline{E} + \frac{4\pi}{3} \underline{P})$, pour une particule ellipsoïdale d'axe $a_1$ et $a_2$, il introduit un facteur de forme $L_i = \frac{4\pi}{3}(1+e_i)$ et le champ interne prend la forme $(\underline{E} + L_i \underline{P})$.

Le calcul de la polarisation du milieu sous l'influence du champ électrique, en tenant compte des propriétés optiques et géométriques des particules, permet de calculer la biréfringence du milieu :

$$\Delta n = \Pi b \frac{g}{D}$$

g, D, $\Pi$ et b ayant les significations habituelles.

Après avoir montré que la biréfringence d'une solution colloïdale dépendait de deux termes : le premier lié aux propriétés optiques des particules, il est nul si elles sont optiquement isotropes, le second dépendant de la forme des particules, il est nul si elles sont sphériques, Sadron a constaté un accord très satisfaisant entre la théorie proposée et les résultats expérimentaux obtenus par R. Signer sur diverses solutions de polystyrolènes.

Postérieurement, Sadron a étendu sa théorie aux systèmes polydispersés. Les résultats sont en assez bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus lors de l'étude de différents mélanges binaires et en particulier d'un mélange d'acétylcelluloses micellaire et moléculaire.

En particulier, les mesures effectuées sur une nitrocellulose fractionnée montraient que la faible polydispersité résiduelle provoquait une perturbation sensible pour les grandes valeurs du gradient de vitesse : l'écart entre $X$ mesuré et $X$ calculé augmentant de façon non négligeable lorsque l'on faisait croître le gradient de vitesse.

### VI.2.6 THEORIE DE PETERLIN - STUART [40] ET DE SNELLMANN - BJORNSTAL [41]

C'est la théorie qui semble le mieux rendre compte du comportement de solutions monodispersées qu'il s'agisse de particules colloïdales ou de grandes molécules réparties dans un solvant. Les hypothèses sont les mêmes qu'en VI.2.5. En particulier ces auteurs supposent que le système s'ordonne et devient anisotrope sous l'effet d'un gradient de vitesse mais ici le mouvement d'une particule est traitée en trois dimensions et les valeurs de la fonction de distribution F sont plus réalistes. De plus la relation de Lorenz-Lorentz n'est plus appliquée à un élément de dimension identique à celle de la particule mais à un élément de dimensions beaucoup plus grandes.

Snellmann et Bjornstal reprennent la théorie de Peterlin et Stuart mais ils tiennent compte en plus de l'absorption de la lumière par les particules.

Le système monodispersé étudié n'est pas biréfringent au repos, les particules qui le composent sont toutes identiques, neutres, rigides et ont la forme d'ellipsoïdes de révolution, homogènes (longueur du grand axe $2a_1$, du petit axe $2a_2$).
Les dimensions sont comprises entre 10 Å - afin de pouvoir négliger la structure moléculaire du solvant - et 1000 Å - afin de pouvoir traiter l'influence du champ électrique de l'onde incidente de manière quasi-statistique [42].

Le système est supposé suffisamment dilué pour qu'il n'y ait pas d'effet d'interaction de telle sorte que l'effet total est la sommes des effets dus à chaque particule.
Les équations de Jeffery [39], dejà utilisées par Sadron et en accord avec la théorie de Haller, régissent le mouvement de rotation d'une particule.

Lorsque l'on veut traiter le cas de n molécules identiques de soluté, la moyenne temporelle de la viscosité spécifique ne peut être calculée car elle dépend de la répartition initiale en direction des axes. Alors que Jeffery choisissait comme conditions initiales le moment où un régime permanent était établi, Peterlin tient compte du fait que la répartition d'axes subit l'influence du mouvement brownien et montre que la fonction de répartition a pour limite une fonction stationnaire qui est la même quelque soit la durée de mise en route de l'écoulement (pourvu qu'elle soit quasi-stationnaire, c'est-à-dire assez lente).

$$\omega_\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{g}{2}(1+b\cos 2\psi)$$
$$\omega_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{bg}{4}\sin 2\theta \sin 2\psi \qquad b = \frac{a_1{}^2 - a_2{}^2}{a_1{}^2 + a_2{}^2}$$

La fonction de distribution F obéit à l'équation différentielle suivante :

(59bis) $$\frac{\partial F}{\partial t} = D\,\nabla^2 F - \operatorname{div}(F\omega) \qquad D : \text{constante de diffusion}$$

$\omega$ étant la vitesse angulaire des particules de composantes $\omega_\psi$ et $\omega_\theta$
Peterlin suppose qu'un état d'équilibre est atteint au bout d'un temps $\tau_o = 1/6D$ ce qui implique $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$
L'équation (59bis) prend alors la forme suivante :

(59ter) $$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} = \frac{b\sigma}{2}\left[\frac{\sin 2\theta \sin 2\psi}{2}\frac{\partial F}{\partial \theta} + \left(\frac{1+b\cos 2\psi}{b}\right)\frac{\partial F}{\partial \psi} - 3F\sin 2\psi \sin^2\theta\right.$$

avec $$\sigma = \frac{g}{D}$$

On retrouve l'équation utilisée par Boeder en faisant b=1.
L'équation (59ter) peut être résolue dans certains cas particuliers :

1°. Pour les faibles valeurs de $\sigma$

- Pour $\sigma \leqslant 6$

$$F = 1 + \frac{b\sigma}{2}\left[\frac{3\sin^2\theta}{(36+\sigma^2)}(6\sin 2\psi - \sigma\cos 2\psi)\right] + \left(\frac{b\sigma}{2}\right)^2\left[\frac{1}{4(36+\sigma^2)}\left\{9\cos^4\theta - 18\cos^2\theta + \frac{21}{5}\right) + ((\sigma^2-60)\cos 4\psi - 16\sigma\sin 4\psi)\ \frac{15\sin^4\theta}{(\sigma^2+100)}\right\}\right]$$

Le maximum est obtenu pour $\theta = 90°$ et $\psi \geqslant 45°$, le minimum pour $\theta = 90°$ et $\psi \geqslant 135°$.

- Pour $\sigma \leqslant 1.5$.

L'expression ci-dessus peut se simplifier et F prend la forme suivante :

$$F = 1 + \frac{b\sigma}{4}\sin 2\psi \sin^2\theta + \left(\frac{b\sigma}{8}\right)^2[\sin^4\theta\,(1-\cos 4\psi) - \frac{8}{15}\left(\frac{5}{b}\sin^2\theta\cos 2\psi + 1\right)]$$

- Pour $\sigma \to 0$ , l'expression de F se simplifie encore

$$F = 1 + \frac{b\sigma}{4}\sin^2\theta \sin 2\psi$$

Le maximum est alors obtenu pour $\theta = 90°$ et $\psi = 45°$, le minimum pour $\theta = 90°$ et $\psi = 135°$

2°. Pour $\sigma \to \infty$

$$F = 1 - \frac{3}{2}b\cos 2\psi\sin^2\theta + b^2\left[\frac{3}{80}(15\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 7) + \frac{15}{16}\cos 4\psi\sin^4\theta\right]$$

$$- b^3\left[\frac{\cos 2\psi\sin^2\theta}{320}(105\cos^4\theta - 450\cos^2\theta + 201) + \frac{35}{64}\cos 6\psi\sin^6\theta\right]$$

le maximum se produit pour $\theta = 90°$ et $\psi < 90°$

Comme l'avait fait Sadron, la polarisation $\underline{P}$ est posée égale à la somme de $\underline{P}_p$ et $\underline{P}_o$

$\underline{P}_o$ est reliée au champ électrique externe par la relation

$$4\pi\underline{P}_o = (\epsilon^o - 1)\,\underline{E}$$

La polarisation $\underline{P}_p$, dans une direction, à l'intérieur d'un milieu dont le solvant à une permittivité $\epsilon^\circ$ due à $N_p$ particules, chacune ayant une composante moyenne de moment dipolaire $\underline{M}$ dans cette direction, causé par le champ électrique $\underline{E}$

s'écrit $\underline{P}_p = \epsilon^\circ N_p \underline{M} = \epsilon^\circ N_p \underline{\underline{p}}\, \underline{E}$

Les composantes du champ interne suivant les axes de la particule $\overrightarrow{O\xi}$, $\overrightarrow{O\eta}$ et $\overrightarrow{O\zeta}$ sont $E_i + L_i P_i$ ($i = \xi, \eta, \zeta$), $E_i$ sont les composantes du champ électrique externe, $P_i$ les composantes de la polarisation, $L_i$ les facteurs de forme caractérisant l'assymétrie du champ interne.

Les composantes du moment induit sont données par :

$$m_i = \alpha'_i (1 + L_i \kappa_i) E_i$$

$\kappa_i$ est la susceptibilité optique, relative de la particule donnée par $\dfrac{P_i}{\epsilon E_i}$

$\alpha'_i$ est la polarisabilité relative

Pour une ellipsoïde de révolution $\epsilon_\eta = \epsilon_\zeta$ , $\alpha'_\eta = \alpha'_\zeta$ et $L_\eta = L_\zeta$

Pour simplifier l'écriture, on pose $\alpha'_\xi = \alpha'$ et $\alpha'_\eta = \beta'$

Le long des directions $\overrightarrow{Oj}$ les composantes deviennent :

$$m_j = \sum_i \alpha'_i (1 + L_i \kappa_i) E_i \cos(ij)$$

Si $E_k$ est la composante de $\underline{E}$ le long des axes $\overrightarrow{Oj}$ ; les composantes, le long des directions $\overrightarrow{Oj}$, dues à $E_k$ seul s'écrivent :

$$m_{ik} = \sum_i \alpha'_i (1 + L_i \kappa_i) E_k \cos(ik)$$

Les valeurs moyennes $M_{ik}$ des composantes du moment sont données par :

$$M_{ik} = \frac{\int m_{ik} dN}{\int dN} = p_{ik} E_k$$

$\underline{\underline{p}}$ est caractérisé par une matrice symétrique.

Pour trouver les directions de permittivités principales du milieu, $\underline{\underline{p}}$ est diagonalisé et l'angle $\chi$ est donné par la relation

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F \sin^3\theta \sin 2\phi \, d\theta \, d\phi}{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F \sin^3\theta \cos 2\phi \, d\theta \, d\phi}$$

Cette équation coïncide avec celle proposée par Boeder en posant $\theta = 90°$.

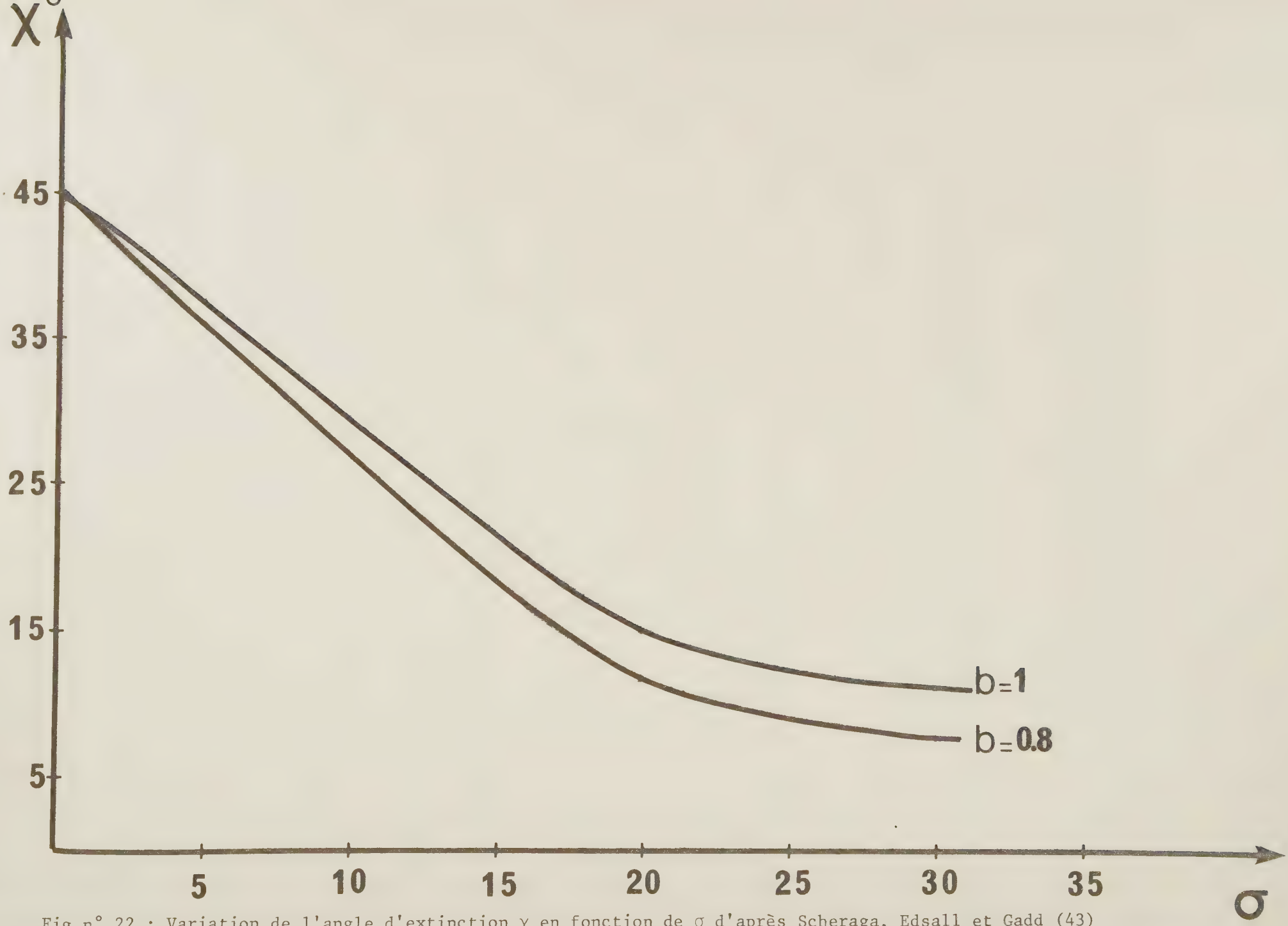



Fig n° 22 : Variation de l'angle d'extinction $\chi$ en fonction de $\sigma$ d'après Scheraga, Edsall et Gadd (43)

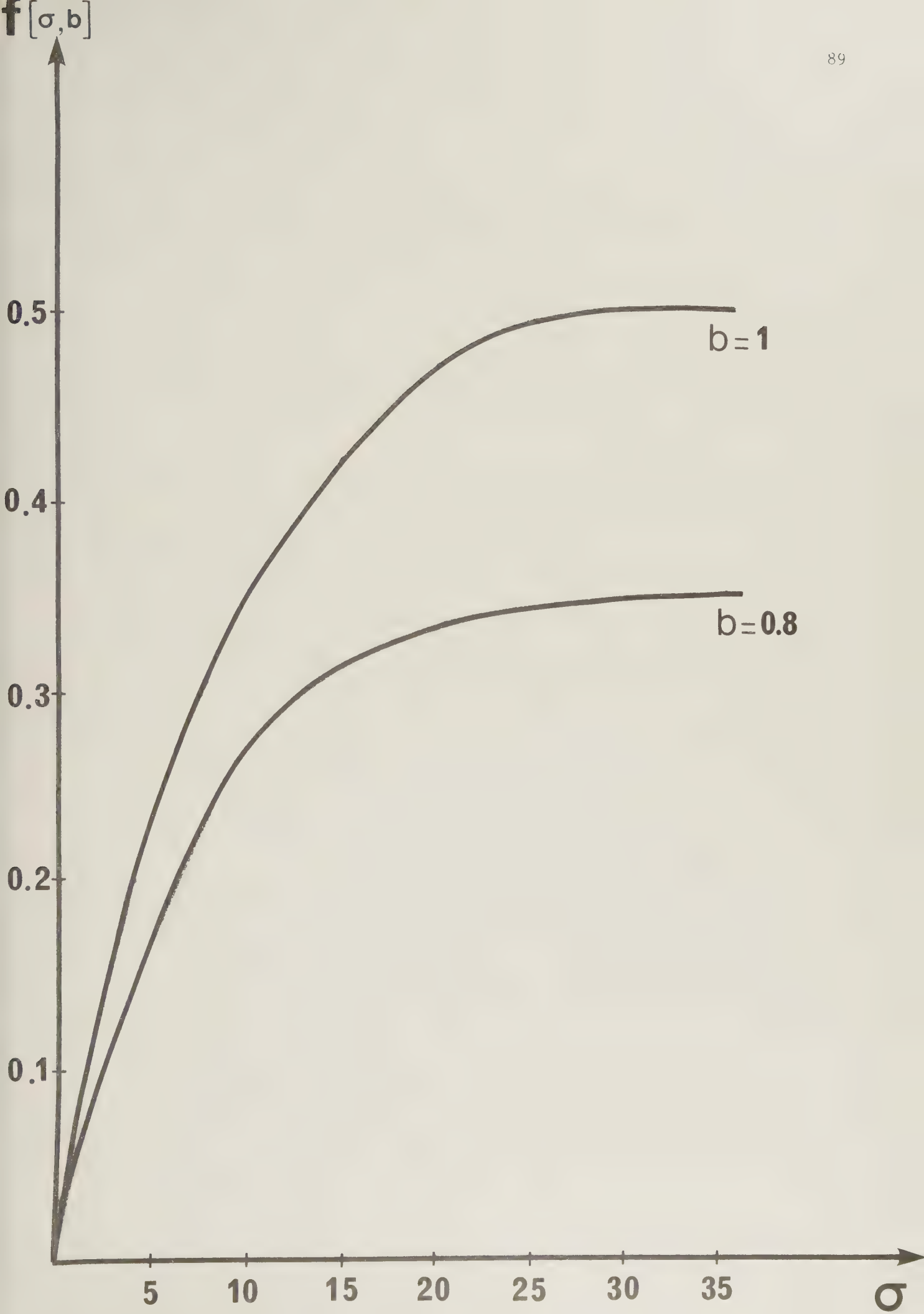



Fig n° 23 : Variation de f (σ,b) en fonction de σ d'après Scheraga, Edsall et Gadd (43)

La biréfringence $\Delta n$ est donnée par :

$$\Delta n = n_x - n_y = \frac{2\pi N_p}{n} n\sigma^2 \mathcal{R} f(\sigma, b)$$

$n_o$ et n sont respectivement l'indice de réfraction du solvant et de la solution (en pratique, ils sont généralement les mêmes).

$f(\sigma, b)$ est une fonction de $\sigma$ et de b appelée facteur d'orientation.

$\mathcal{R}$ représente la partie réelle de la fonction $\Pi_{xy}$ donnée par :

$$\Pi_{xy} = 4\left[\frac{(\alpha'-\beta')(1-\frac{N_p}{3}(\alpha' L_\xi + 2\beta' L_\eta) + N_p\alpha'(\alpha' L_\xi - \beta' L_\eta)}{4(1-\frac{N_p}{3}(\alpha' L_\xi + 2\beta' L_\eta)^2 - (N_p(\alpha' L_\xi - \beta' L_\eta) f(\sigma,b))^2}\right]$$

Dans le domaine où $\sigma \leqslant 1.5$, Peterlin et Stuart ont trouvé que :

$$X = \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{12}\left[1 - \frac{\sigma^2}{108}\left(1 + \frac{24b^2}{35}\right) + \cdots\right]$$

et

$$f(\sigma,b) = \frac{\sigma b}{15}\left[1 - \frac{\sigma^2}{72}\left(1 + \frac{6b^2}{35}\right) + \cdots\right]$$

Pour des valeurs plus importantes de $\sigma$, il n'existe pas d'expressions simples mais des calculs numériques ont été effectués pour différentes valeurs de b.

Les figures n°22 et 23 représentent l'allure de variation de $X$ et du facteur d'orientation en fonction de $\sigma$ pour différentes valeurs de r (rapport des axes de l'ellipse).

V étant le volume occupé par les particules en suspension par unité de volume de la solution, on peut poser :

$$\epsilon^\circ \alpha' = g_1 V \qquad \text{et} \qquad \epsilon^\circ \beta' = g_2 V$$

Dans le cas où la concentration est faible et où il n'y a pas de dichroïsme, la biréfringence $\Delta n$ peut alors s'écrire :

$$\Delta n = \frac{2\pi N_p V}{n} \mathcal{R}(g_1 - g_2) f(\sigma, b)$$

Pour des solutions beaucoup plus concentrées ou lorsque l'on constate la présence de dichroïsme :

$$\Delta n = \frac{2\pi N_p V}{n} \mathcal{R}\left((g_1 - g_2) - \frac{4\pi N_p V l_f}{3\varepsilon^0}\left[4(g_1^2 + g_2^2) + g_1 g_2\right]\right) f(\tau, b)$$

$l_f$ est le facteur d'excentricité du champ, relié aux facteurs de forme par les équations ci-dessous :

$$L_\xi = \frac{4\pi}{3}(1-2\,l_f) \qquad \text{et} \qquad L_\eta = \frac{4\pi}{3}(1+l_f)$$

Il faut cependant noter que, lorsque la concentration augmente, la validité des hypothèses initiales diminue si bien que l'expression de la biréfringence devient très approchée.

D'un autre côté Peterlin et Stuart ont cherché à relier la biréfringence due à l'orientation des molécules produite par effet Kerr, par effet Cotton et par écoulement aux caractéristiques de la molécule en solution de manière à pouvoir déterminer, comme l'ont fait Waldmann et Hess dans le cas des gaz, les grandeurs moléculaires à partir de mesures optiques de biréfringence.

Les molécules de solution sont supposées homogènes et rigides grosses devant celles du solvant, douées d'un axe de symétrie géométrique, optique, électro et magnétostatique ; la solution est peu concentrée.
Ils aboutissent aux relations suivantes, v représentant le volume de la molécule :

en présence d'un champ électrique $\quad \Delta n \propto c\ n\ E^2 \frac{v}{KT_B}\ f_1\ f_2$

en présence d'un champ magnétique $\quad \Delta n \propto c\ n\ H^2 \frac{v}{KT_B}\ f_1\ f_3$

en présence d'un écoulement $\quad \begin{cases} \Delta n \propto c\ n\ g\ \zeta\ \frac{v}{KT_B}\ f_1\ f_4 \\ \frac{\pi}{4} - \chi = \frac{g}{12D} \end{cases}$

D représentant toujours le coefficient de diffusion d'orientation.

$\zeta$ représentant le coefficient de viscosité du solvant.

$f_1 f_2$ et $f_3$ caractérisant respectivement les anisotropies optique, électrique et magnétique.

$f_4$ est une fonction qui ne dépend que de l'anisotropie de forme de la molécule.

Si l'on suppose, en plus, que les moyennes isotropes de n, $\epsilon$ et $\mu$ sont celles du milieu dense, en tenant compte du fait

que $\frac{n^2-1}{\epsilon-1}$ = cte pour une molécule donnée, on peut calculer

$n_1$, $n_2$, $\epsilon_1$, $\epsilon_2$, $\mu_1$, $\mu_2$, $p = \frac{a_1}{a_2}$ et v, l'indice 1

se rapporte à la direction de l'axe, l'indice 2 à sa perpendiculaire.

Dans le cas des molécules de taille moyenne (dimensions comprises entre 10 et 100 Å) la détermination expérimentale de l'angle $(\frac{\pi}{4} - \chi)$ qui est petit, est imprécise ; on peut y remédier en

mesurant la viscosité de la solution ce qui fournit une relation supplémentaire.

Dans le cas de grosses molécules lorsque l'on augmente $E^2$ et g des effets non linéaires apparaissent qui fournissent des résultats expérimentaux supplémentaires permettant ainsi le controle du bien fondé des hypothèses.

### VI.2.7 REMARQUES

Dans le cas de faibles gradients de vitesse, $\chi$ peut être considéré comme proche de 45° et $\Delta n$ est proportionnel à g à condition que la viscosité du liquide soit indépendante de g.

Dans le cas du liquide choisi le "milling yellow", on peut peut-être penser que le mécanisme de la biréfringence est plus complexe qu'une simple orientation de particules rigides ; l'anisotropie pouvant être due simultanément à l'orientation des molécules, à leur déformation et peut-être à la forme de certains agrégats dont on détecte l'apparition rapide.

C'est pourquoi les lois de variation de $\chi$ et de $\Delta n$ en fonctions du gradient de vitesse ont été étudiées expérimentalement, par P. Randria [44] et par nous-mêmes, les résultats de cette étude sont rapportés dans ce même chapitre, aux paragraphes 5 et 7.

## VI.3 FLUIDES NEWTONIENS ET NON-NEWTONIENS

Si nous considérons l'écoulement d'un fluide, les forces extérieures qui provoquent cet écoulement sont reliées aux contraintes qui apparaissent à l'intérieur du fluide, selon le type de relation, les fluides sont dits newtoniens, ostwaldiens.

### VI.3.1 FLUIDE NEWTONIEN

Si la liaison entre les contraintes et la déformation est linéaire, le fluide est dit newtonien : c'est le cas des gaz et de nombreux liquides purs. Soit $\tau$ la contrainte de cisaillement, on peut l'exprimer en fonction du gradient de vitesse ainsi :

$$\tau = \zeta \, g$$

$\zeta$ est un scalaire, appelé coefficient de viscosité dynamique, il est constant dans le cas d'un fluide newtonien, c'est une fonction du gradient de vitesse dans les autres cas.

### VI.3.2 FLUIDE NON NEWTONIEN

Le coefficient $\zeta$ est dit, alors, coefficient de viscosité apparente ; dans la majorité des cas (solutions de polymères, colorants) c'est une fonction décroissante du gradient de vitesse. On constate en général que, pour les faibles gradients de vitesse, le comportement est celui d'un fluide newtonien, puis la viscosité apparente décroit et pour les forts gradients de vitesse elle garde une valeur asymptotique constante.

Une explication de ce phénomène a été fourni par Hermans [45] : il suppose l'existence de jonctions temporaires entre les molécules du soluté ; pour les faibles gradients de vitesse, le mouvement brownien est prépondérant, la viscosité reste constante, lorsque le gradient de vitesse augmente, le nombre moyen de jonctions est de plus en plus affecté par l'écoulement et la viscosité apparente décroit, lorsque le gradient de vitesse est élevé, la durée de vie d'une jonction devient si faible que leur présence n'affecte plus la viscosité qui reste constante.

### VI.3.3 FLUIDE OSTWALDIEN

Parmi les fluides non newtoniens, certains fluides pseudoplastiques sont tels que la contrainte de cisaillement et le gradient de vitesse sont reliés, dans un assez large domaine par la loi :

$$\tau = K \, g^r$$

K est appelé la consistance

r l '"indice de comportement" du fluide est compris entre 0 et 1. Cependant, pour les faibles gradients de vitesse, nous venons de voir ci-dessus que cette loi ne s'appliquait pas.

### VI.3.4 REMARQUES

La solution que nous avons choisi d'utiliser : le "milling yellow" est un fluide pseudoplastique ostwaldien dont le comportement rhéologique varie beaucoup avec la concentration et la température. Il a été étudié très en détail par plusieurs auteurs [44] [56] [57] [58] qui trouvent tous qu'aux faibles gradients de vitesse et pour les concentrations utilisées ( $\leqslant 1,4\%$) le comportement peut être assimilé à un fluide newtonien.

## VI.4 PROPAGATION D'UNE ONDE POLARISEE A L'INTERIEUR D'UN FLUIDE BIREFRINGENT EN MOUVEMENT

Dans le paragraphe II.3, on aboutissait à une équation de propagation qui faisait intervenir le potentiel vecteur $\underline{A}$.

Si l'on veut utiliser uniquement $\underline{E}$, $\underline{D}$, $\underline{k}$ l'équation de propagation s'écrit :

$$\mu_o \omega^2 \underline{D} = k^2 \underline{E} - \underline{k}\,(\underline{kE}) \qquad \text{avec } \underline{D} = \underline{\underline{\epsilon}}\,\underline{E}$$

pour une onde plane monochromatique de fréquence $\omega$ , de vecteur d'onde $\underline{k}$
car div $\underline{E} = -i\,\underline{k}\,\underline{E}$ ; $\underline{\text{grad}}$ div $\underline{E} = -\underline{k}\,(\underline{kE})$

et $\Delta \underline{E} = -k^2 \underline{E}$

Pour un fluide incompressible [20], dans le cas général :

$$(60) \qquad \epsilon_{ij} = \left[ \delta_{ij} + a\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + b\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \epsilon^\circ$$

$\epsilon_{ij}$ est donc relié à la partie symétrique du gradient de vitesse par le coefficient a et à la partie antisymétrique par le coefficient b. Lorsque la molécule présente une symétrie, b est petit devant a, le terme antisymétrique peut être négligé et le liquide peut être considéré comme présentant de la biréfringence linéaire d'écoulement si l'on se place en dehors des bandes d'absorption.

De plus, on suppose que la biréfringence induite dans le milieu par l'apparition d'un gradient de vitesse est constante dans le volume élémentaire étudié.

La lumière se propage suivant l'axe $\overrightarrow{Oy}$, l'équation (14) s'écrit en projetant sur les axes :

$$(61) \qquad \mu_o \omega^2 D_x = k^2 E_x$$

$$(62) \qquad \mu_o \omega^2 D_z = k^2 E_z$$

$$D_y = 0$$

avec $\underline{E} = \frac{1}{\epsilon^\circ}(1+\underline{\eta})^{-1}\,\underline{D}$ avec $\eta_{ij} = a\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

en posant $q^2 = \mu_o \omega^2 \epsilon^o$ et $\underline{\underline{\kappa}} = (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\eta}})^{-1}$

les équations (61) et (62) peuvent s'écrire :

$$k^2 \kappa_{xz} D_z + (k^2 \kappa_{xx} - q^2) D_x = 0$$

et $$k^2 \kappa_{zx} D_x + (k^2 \kappa_{zz} - q^2) D_z = 0$$

pour qu'il existe une solution non nulle à ce système d'équations il faut que :

$$(63) \quad \frac{k^2 \kappa_{xz}}{k^2 \kappa_{zz} - q^2} = \frac{k^2 \kappa_{xx} - q^2}{k^2 \kappa_{zx}}$$

On peut exprimer facilement $\kappa_{ij}$ en fonction de $\eta_{kl}$

En tenant compte du fait que le fluide est incompressible, div $\underline{v}$=o donc :

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz} = 0$$

En posant :

$$\Delta = 1 + \eta_{yy}\eta_{zz} + \eta_{xx}\eta_{yy} + \eta_{xx}\eta_{zz} - \eta^2_{yz} - \eta^2_{xy} - \eta^2_{xz} - \eta_{xx}\eta^2_{yz}$$
$$- \eta_{yy}\eta^2_{xz} - \eta_{zz}\eta^2_{xy} + \eta_{xx}\eta_{yy}\eta_{zz} + 2\eta_{xy}\eta_{yz}\eta_{xz}$$

On aboutit à :

$$\kappa_{xx} = \frac{1}{\Delta}\left[(1+\eta_{yy})(1+\eta_{zz}) - \eta^2_{yz}\right]$$

$$\kappa_{zz} = \frac{1}{\Delta}\left[(1+\eta_{xx})(1+\eta_{yy}) - \eta^2_{xy}\right]$$

$$\kappa_{xz} = \frac{1}{\Delta}\left[\eta_{xy}\eta_{yz} - \eta_{xz}(1+\eta_{yy})\right] = \kappa_{zx}$$

La condition (63) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{k^2}{q^2} = \frac{(\kappa_{zz} + \kappa_{xx}) \pm \left[(\kappa_{zz} - \kappa_{xx})^2 + 4\kappa^2_{xz}\right]^{1/2}}{2(\kappa_{zz}\kappa_{xx} - \kappa^2_{xz})}$$

Si on remplace $\kappa_{ij}$ par leurs expressions en fonction de $\eta_{ij}$

$$\frac{k^2}{q^2} = \frac{(2+\eta_{yy}) \pm \left[(\eta_{xx} - \eta_{zz})^2 + 4\eta^2_{xz}\right]^{1/2}}{2(1+\eta_{yy})}$$

après avoir négligé les termes du second ordre.

Il existe donc deux solutions correspondant à :

$$(64)\quad k_1 = q\left(1 + \frac{\left[(\eta_{xx}-\eta_{33})^2 + 4\eta^2_{x3}\right]^{1/2} - \eta_{yy}}{4(1+\eta_{yy})}\right) = \frac{n_1\omega}{c}$$

$$(65)\quad k_2 = q\left(1 - \frac{\left[(\eta_{xx}-\eta_{33})^2 + 4\eta^2_{x3}\right]^{1/2} + \eta_{yy}}{4(1+\eta_{yy})}\right) = \frac{n_2\omega}{c}$$

c : vitesse de la lumière

$\omega$ : fréquence de la lumière

$n_1, n_2$: indices de réfraction du milieu traversé

Or $q^2 = \mu_o \omega^2 \epsilon^\circ$ donc $\frac{qc}{\omega} = 1$

et l'on tire des équations (64) et (65)

$$(66)\quad \Delta n = n_1 - n_2 = \frac{1}{2}\left[-\eta_{xx} + \eta_{zz})^2 + 4\eta^2_{xz}\right]^{1/2}$$

$\Delta n$ représente la biréfringence du biréfringent élémentaire suivant la direction Oy.

La direction des modes est déterminée par le rapport $\frac{D_x}{D_z}$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \left\{\frac{D_x}{D_z}\right\}_1 = \frac{-2\eta_{zz} - \eta_{yy} + \left[(\eta_{xx}-\eta_{zz})^2 + 4\eta^2_{xz}\right]^{1/2}}{-2\eta_{xz}}$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \left\{\frac{D_x}{D_z}\right\}_2 = \frac{-2\eta_{zz} + \eta_{yy} - \left[(\eta_{xx}-\eta_{zz})^2 + 4\eta^2_{xz}\right]^{1/2}}{-2\eta_{xz}}$$

ou encore en fonction de $\Delta n$

$$(67)\quad \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{(-\eta_{xx} + \eta_{zz}) - 2\Delta n}{2\eta_{xz}} \qquad \text{et}$$

$$(68)\quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{(-\eta_{xx} + \eta_{zz}) + 2\Delta n}{2\eta_{xz}}$$

Il est facile de vérifier que $\operatorname{tg}\theta_1 \times \operatorname{tg}\theta_2 = -1$ c'est à dire que les deux directions $\theta_1$ et $\theta_2$ sont orthogonales.

En effectuant une observation suivant la direction $\overrightarrow{Oy}$, on peut mesurer : $\Delta n$ et $tg\,\theta_2$ par exemple qui sont liées aux composantes du gradient de vitesse par les équations (66) et (68).

On en déduit $$\eta_{xz} = \frac{2\,\Delta n\, tg\,\theta_2}{1 + tg^2\theta_2} = \Delta n \sin 2\theta_2$$

et $$\eta_{xx} - \eta_{zz} = \frac{2\,\Delta n\,(1 - tg^2\theta_2)}{1 + tg^2\theta_2} = 2\,\Delta n \cos 2\theta_2$$

Après avoir mesuré $\Delta n$ et $tg\,\theta_2$ on connait donc :

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

Si l'observation se fait suivant la direction $\overrightarrow{Ox}$, on en déduit de la même manière :

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

Enfin, si l'observation se fait suivant la direction $\overrightarrow{Oz}$, on déduit des mesures :

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)$$

L'étude expérimentale étant une étude de faisabilité, nous nous limiterons à une seule observation suivant l'axe $\overrightarrow{Oy}$, pour alléger le dispositif de mesure et de dépouillement des résultats.

CAS D'UN LIQUIDE PRESENTANT DU DICHROISME D'ECOULEMENT.

Sous l'effet d'un gradient de vitesse, l'orientation partielle des molécules peut provoquer un effet de dichroïsme d'écoulement [46] [47]. Cet effet a été détecté en particulier pour des colorants [48].

La théorie que nous avons exposée ci-dessus suppose donc que la longueur d'onde du laser utilisé est choisie en dehors des bandes d'absorption du liquide étudié afin d'éliminer l'influence d'un dichroïsme linéaire d'écoulement.

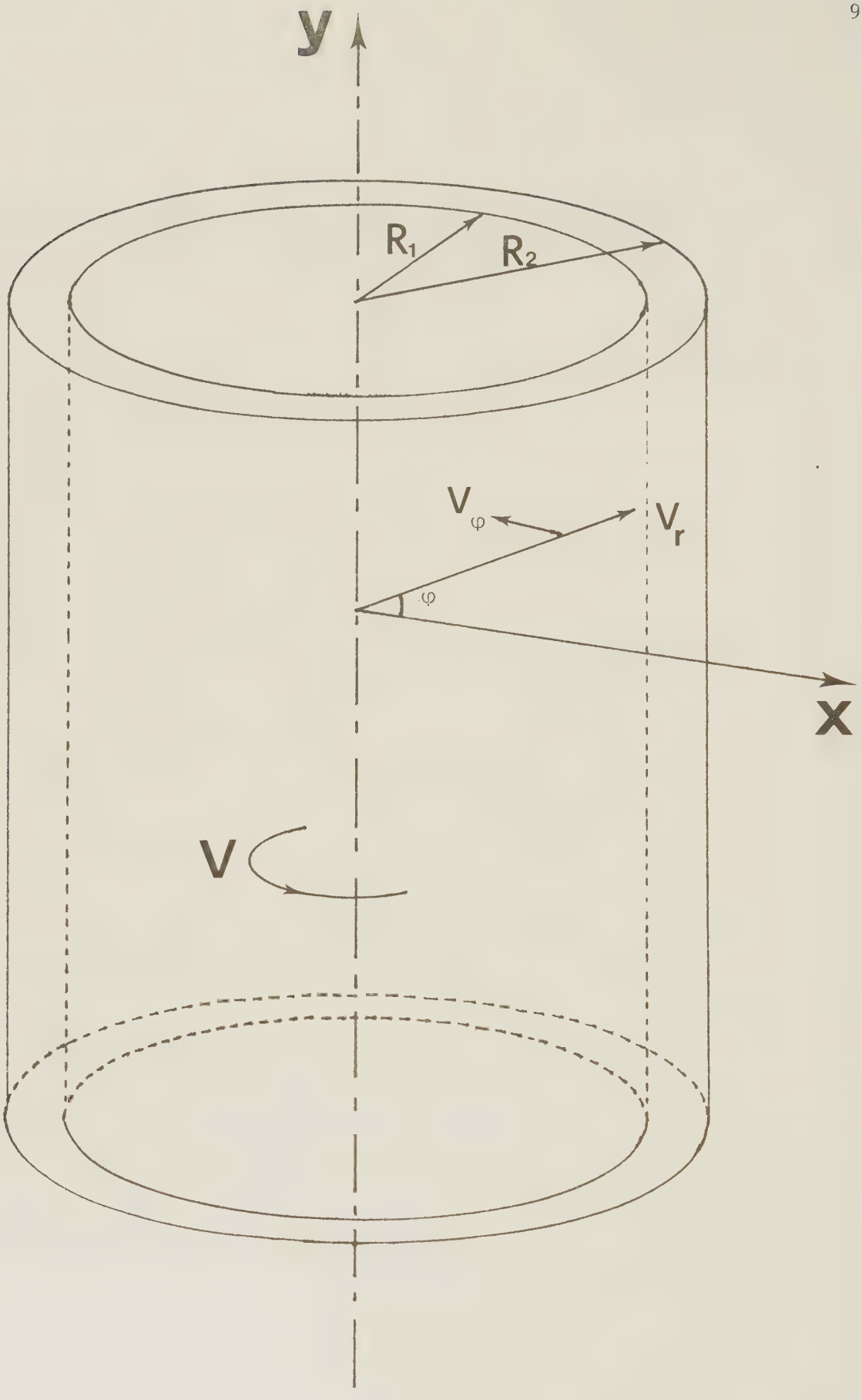



Fig n° 24 : Notations utilisées pour l'étude des cylindres de Couette

## VI.5 ECOULEMENT DANS UN CYLINDRE DE COUETTE

### VI.5.1 INTRODUCTION

Nous avons choisi l'étude d'un liquide en mouvement entre deux cylindres coaxiaux, le cylindre intérieur tournant, le cylindre extérieur fixe est en verre pour permettre les mesures en diffusion. En effet ce type d'écoulement, qui peut être, suivant la vitesse de rotation du cylindre, laminaire simple, laminaire avec des rouleaux de Taylor ou turbulent, a été longuement étudié [49] [50] ; notre but étant la mise au point d'une méthode de diagnostic, l'étude de l'écoulement dans l'entrefer des cylindres de Couette nous a semblé très favorable.

La figure n°24 schématise les deux cylindres :
$R_1$ et $R_2$ sont les rayons respectifs des cylindres intérieurs et extérieurs.

r est la distance du point considéré dans l'entrefer à l'axe des cylindres.

$\Omega_1$ est la vitesse angulaire du cylindre intérieur. $\Omega_2$ étant toujours identiquement nulle.

Pour relier,à l'aide des équations (66) et (68) $\Delta n$ et $\theta$ aux composantes du gradient de vitesse, il faut supposer que, d'une part le fluide est newtonien et, d'autre part que le coefficient de biréfringence est constant dans la gamme de gradients de vitesse étudiés, ceci sera vérifié dans le prochain paragraphe.

### VI.5.2 LIAISONS ENTRE LES COMPOSANTES DU GRADIENT DE VITESSE EN COORDONNEES CARTESIENNES ET CYLINDRIQUES

Les relations (66) et (68) font intervenir les termes $\eta_{xx}$ , $\eta_{zz}$ et $\eta_{xz}$. L'écoulement étudié présentant une symétrie axiale, il y a intérêt à utiliser les coordonnées cylindriques.

Les vitesses $v_x$ et $v_z$ s'expriment facilement en fonction de $v_r$ et $v_\varphi$ (cf. fig n°24).

$$v_x = v_r \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi \qquad x = r\cos\varphi$$

$$v_z = v_r \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi \qquad z = r\sin\varphi$$

D'où :

$$\eta_{xx} = 2a\frac{\partial v_x}{\partial x} = 2a\left(\cos^2\varphi\frac{\partial v_r}{\partial r} - \sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\sin^2\varphi\, v_r + \frac{1}{r}\sin^2\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\, v_\varphi\right)$$

$$\eta_{zz} = 2a\frac{\partial v_z}{\partial z} = 2a\left(\sin^2\varphi\frac{\partial v_r}{\partial r} + \sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos^2\varphi\, v_r + \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\, v_\varphi + \frac{1}{r}\cos^2\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

$$\eta_{xz} = a\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = a\left(\sin 2\varphi\frac{\partial v_r}{\partial r} + \cos 2\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos 2\varphi\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\sin 2\varphi\, v_r - \frac{1}{r}\sin 2\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\cos 2\varphi\, v_\varphi\right)$$

L'équation (66) prend la forme suivante :

$$\Delta = a\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{v_r^2}{r^2} + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{v_\varphi}{r}\right)^2 - \frac{2}{r}v_\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r}v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2}v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\times\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{2}{r^2}v_\varphi\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right]^{1/2}$$

Cette expression se simplifie notablement dans les deux cas pratiques que nous avons étudiés en régime laminaire.

## VI.5.3 CAS PARTICULIERS

### VI.5.3.1 ECOULEMENT LAMINAIRE CLASSIQUE

Bien que le cylindre tournant soit le cylindre intérieur ce qui favorise l'apparition d'instabilités, lorsque la vitesse de rotation est faible, l'écoulement du liquide est purement laminaire donc [50].

$$v_y = 0 \qquad v_r = 0 \qquad v_\varphi = \frac{\Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(\frac{R_2^2}{r} - r\right)$$

Il ne reste donc que les termes $v_\varphi$ et $\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}$
Soit :

$$\eta_{xx} = 2a\left(-\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\, v_\varphi\right) = a\sin 2\varphi\left(\frac{v_\varphi}{r} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)$$

$$\eta_{zz} = 2a\left(\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\, v_\varphi\right) = -\eta_{xx}$$

$$\eta_{xz} = a\left(\cos 2\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos 2\varphi\, v_\varphi\right) = a\cos 2\varphi\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)$$

d'où $\Delta\eta = \pm a\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right) = \pm \frac{2a\Omega_1 R_1^2 R_2^2}{r^2\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$

et $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin 2\varphi \pm 1}{\cos 2\varphi}$ donc $\theta = \varphi + \frac{\pi}{4}$

### VI.5.3.2 ECOULEMENT LAMINAIRE EN PRESENCE DE ROULEAUX DE TAYLOR

Nous venons de voir qu'il existe une solution stationnaire pour l'écoulement ci-dessus.
Supposons qu'il apparaisse une perturbation axisymétrique (les phénomènes resteront donc indépendants de $\varphi$ )caractérisée par les vitesses :

$$v_y \qquad v_r \qquad \text{et} \quad v_\varphi = \frac{\Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(\frac{R_2^2}{r} - r\right)$$

L'application des équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux et incompressible fournit des solutions qui ont la forme suivante [50] :

$$v_r = e^{pt} v_1(r)\cos sy$$

$$v_\varphi = e^{pt} v_2(r)\cos sy$$

$$v_y = e^{pt} v_3(r)\sin sy$$

s étant le nombre d'onde de la perturbation dans la direction de l'axe.

p est une constante qui peut être complexe [49]; si sa partie réelle est positive, la perturbation est instable,si elle est négative, la perturbation est stable.

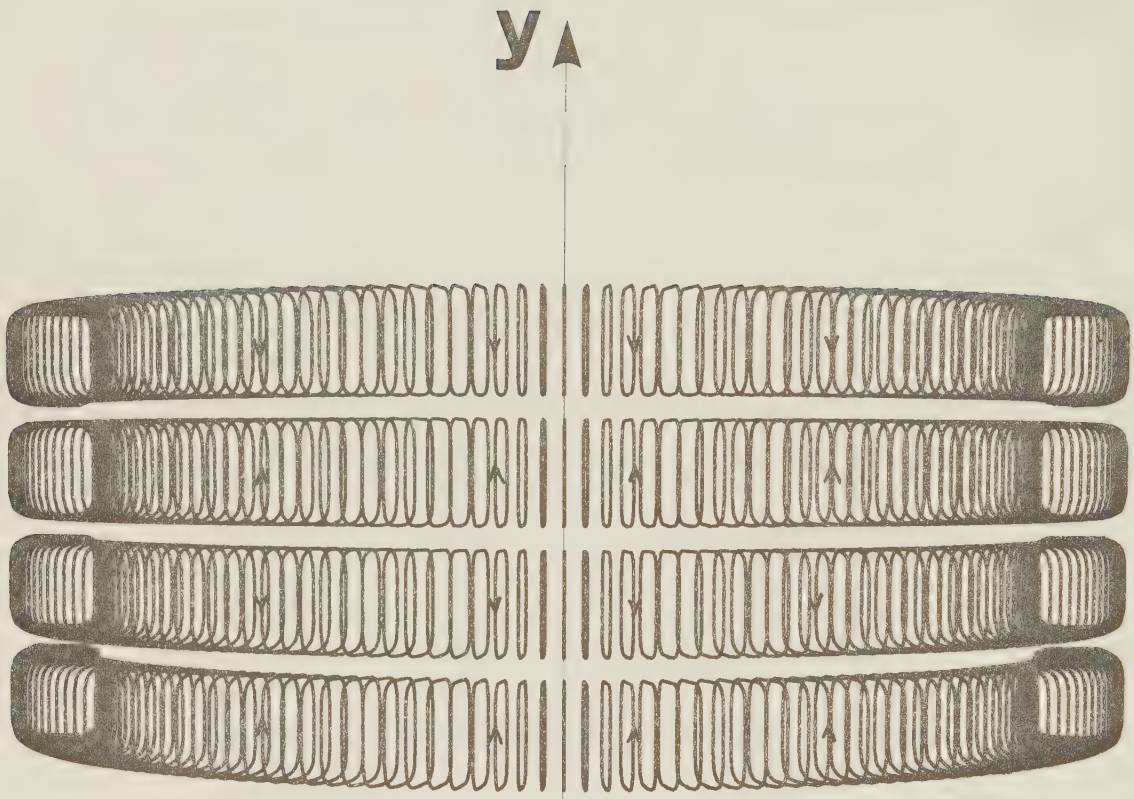



Fig. n° 25 : Répartition des rouleaux de Taylor dans l'entrefer

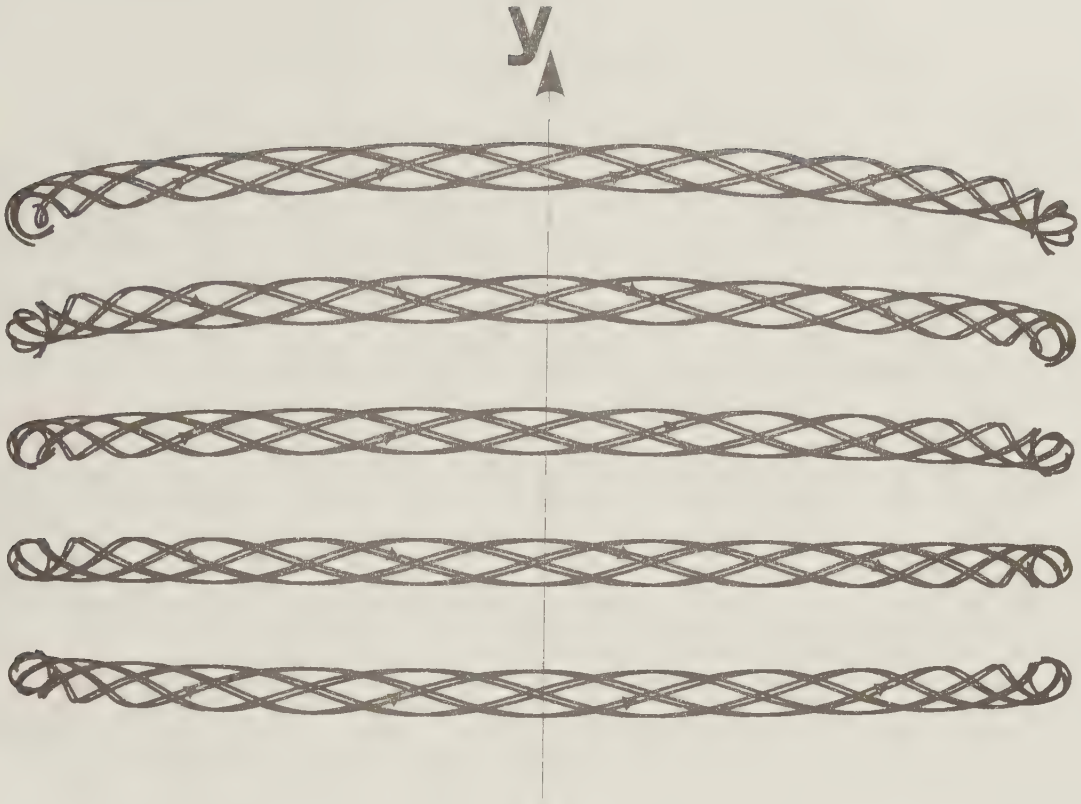



Fig n° 26 : Mouvement des molécules de fluide situées à l'intérieur des rouleaux de Taylor, près du milieu de l'entrefer.

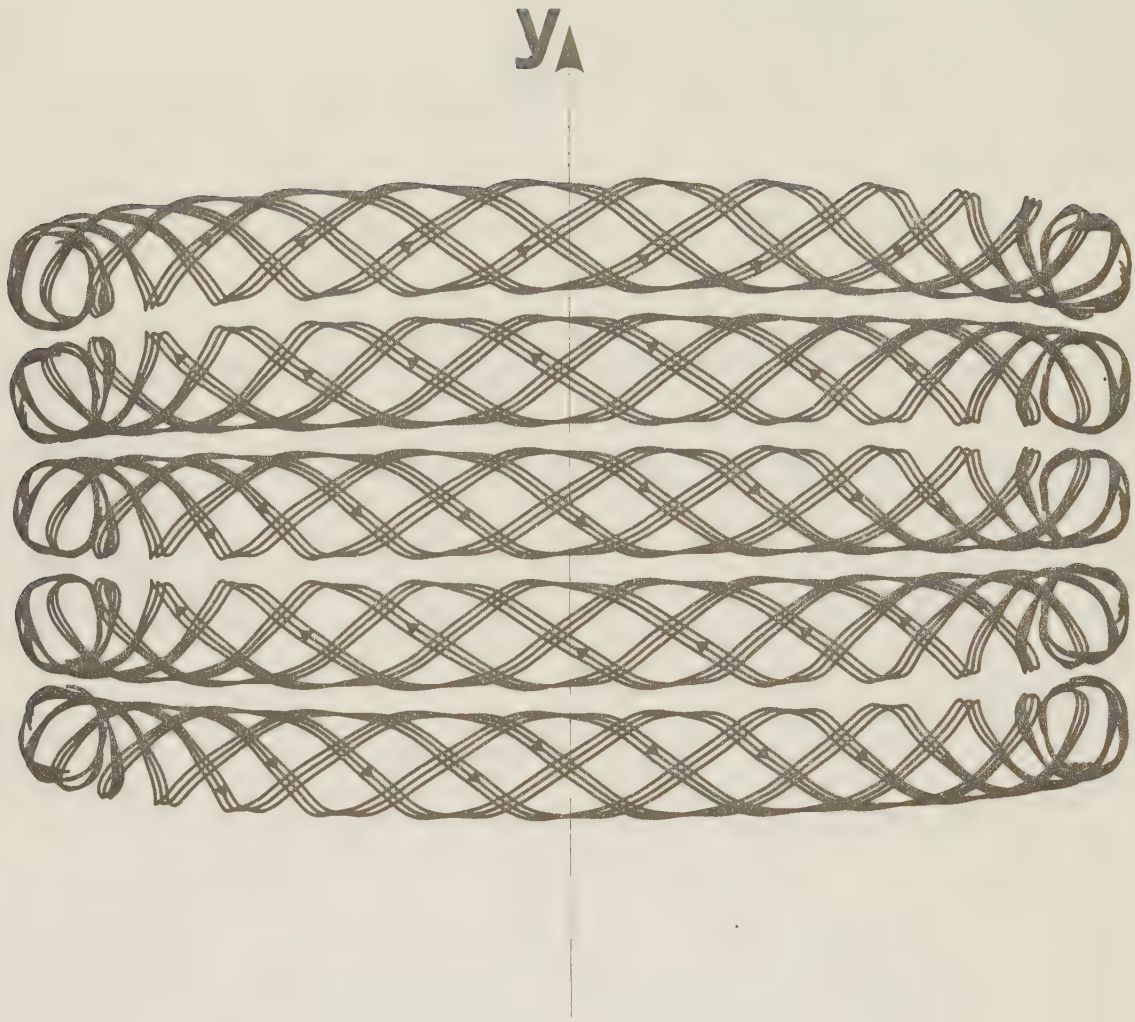



Fig n° 27 : Mouvement des molécules de fluide situées, à l'intérieur des rouleaux de Taylor, près des parois cylindriques.

A partir d'une certaine vitesse de rotation du cylindre intérieur, il a été montré [51] que l'écoulement restait axisymétrique : un ensemble de rouleaux tournants en sens contraire (les dessins n°25, 26 et 27 explicitent le mouvement du liquide dans l'entrefer) apparaît, le phénomène est stationnaire appelé "cas marginal" où p=0,il s'agit des rouleaux de Taylor.

Celui-ci a calculé et vérifié expérimentalement la vitesse de rotation critique au delà de laquelle ces rouleaux apparaissent et persistent ; dans le cas d'un cylindre intérieur tournant et d'un cylindre extérieur fixe :

$$\Omega_c^2 = \frac{\pi^4 \xi^2 (R_1+R_2)}{2P (R_2-R_1)^3 R_1^2}$$

avec $P = 0{,}0571 \left[1-0{,}652\frac{(R_2-R_1)}{R_1}\right] + 0{,}00056 \left[1-0{,}652\frac{(R_2-R_1)}{R_1}\right]^{-1}$

$\Omega_c$ est un ordre de grandeur car il est bien évident que la réalisation mécanique de l'appareillage influe sur cette valeur (qualité des surfaces, régularité de la vitesse de rotation, fluctuations de la température etc...).

En présence de ces rouleaux le croquis n°25 explique l'agencement des rouleaux et les croquis n°26 et 27 visualisent le mouvement du liquide, le phénomène étant indépendant de $\varphi$ , toutes les dérivées par rapport à $\varphi$ sont nulles ; l'équation (66) se simplifie :

$$(68)_{bis} \qquad \Delta m = a\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)^2\right]^{1/2}$$

avec $v_r = v_1(r) \cos sy$ et $v_\varphi = v_2(r) \cos sy$

d'où

$$\eta_{xx} = 2a \cos sy \left(\cos^2\varphi \frac{\partial v_1}{\partial r} + \sin^2\varphi \frac{v_1}{r} + \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{v_2}{r} - \frac{\partial v_2}{r}\right)\right.$$

$$\eta_{zz} = 2a \cos sy \left(\sin^2\varphi \frac{\partial v_2}{\partial r} + \cos^2\varphi \frac{v_1}{r} + \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{\partial v_2}{r} - \frac{v_2}{r}\right)\right.$$

$$\eta_{xz} = a \cos sy \left(\sin 2\varphi \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r}\right) + \cos 2\varphi \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r}\right)\right.$$

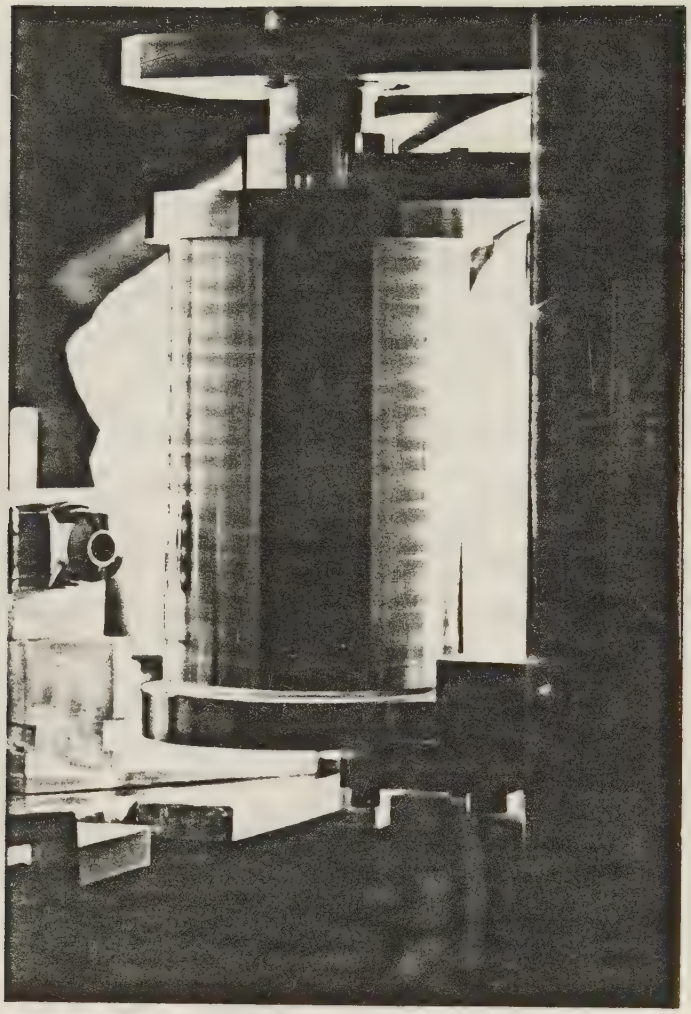


Fig. n° 28. Photographie des rouleaux de Taylor en lumière polarisée.

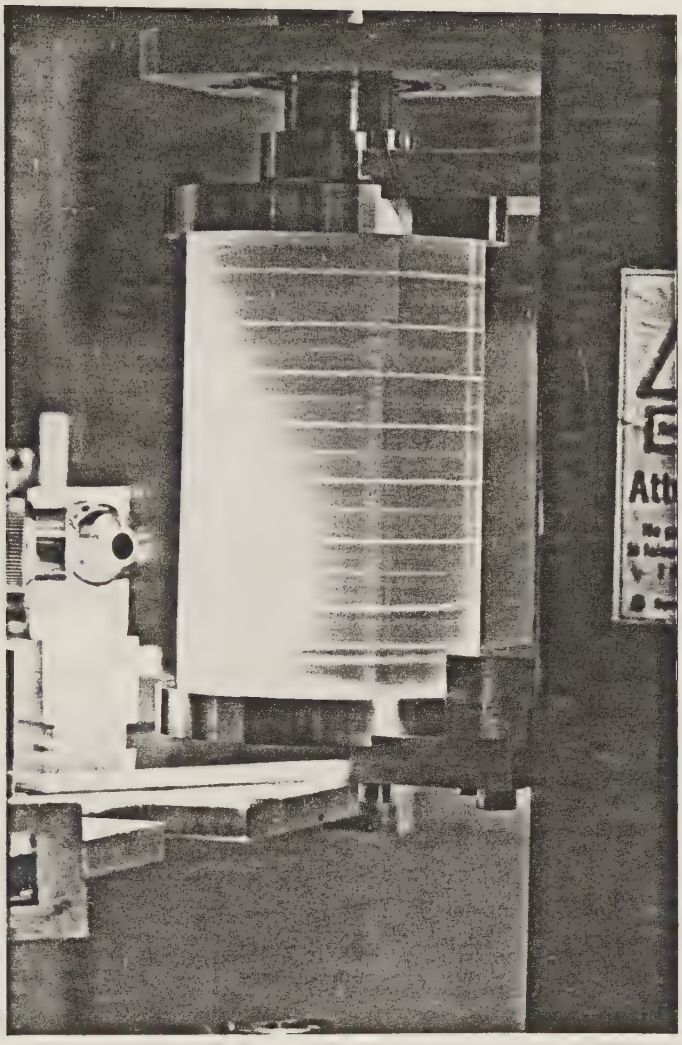


Fig. N° 29. Photographie des rouleaux de Taylor. Les traceurs sont de petites bulles d'air.

L'équation (68)$_{bis}$ prend la forme suivante :

$$(68)_{ter}\quad \Delta n = \pm\, a \cos sy \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad \text{et}$$

$$(69)\quad tg\,\theta = \frac{\cos 2\varphi \left(-\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{v_1}{r}\right) + \sin 2\varphi \left(\frac{\partial v_2}{r} - \frac{v_2}{r}\right) \pm \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r}\right)^2\right]^{-1/2}}{\sin 2\varphi \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r}\right) + \cos 2\varphi \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r}\right)}$$

L'expression (69) montre clairement que tg $\theta$ est indépendant de y.

### VI.5.3.3 CONCLUSION

En résumé, au fur et à mesure que l'on augmente la vitesse de rotation, les différents régimes suivants se succèdent :

1°- Ecoulement laminaire simple $v_y = o$ $v_r = o$ $v_\varphi = f(r)$

2°- Rouleaux de Taylor, cet écoulement est dit laminaire car il est indépendant du temps, une fois les rouleaux établis, si les conditions expérimentales ne varient pas, en particulier si la température donc la viscosité reste constante.
La photographie n°28 montre un écoulement en présence des rouleaux de Taylor le liquide utilisé étant biréfringent, la lumière diffusée étant polarisée rectilignement, il suffit de placer une feuille de polaroïd pour voir apparaître les rouleaux sans qu'il soit nécessaire d'inclure des traceurs dans le liquide (fines particules d'aluminium, bulles d'air de petites dimensions etc...).

La photo n°29 représente le liquide en rotation en présence de petites bulles d'air,on suit mieux le mouvement du fluide dans l'entrefer, en particulier le sens de rotation à l'intérieur d'un rouleau, qui n'apparaît pas sur la photographie n°28 mais il est possible que les bulles perturbent légèrement l'écoulement (valeur du gradient critique, etc...).

3°- Rouleaux de Taylor déformés : il y a apparition d'une perturbation non axisymétrique, la symétrie circulaire disparaît et l'écoulement devient dépendant du temps (52). La photographie n°30 visualise le mouvement du liquide dans ce cas.

4°- Enfin le régime devient turbulent.

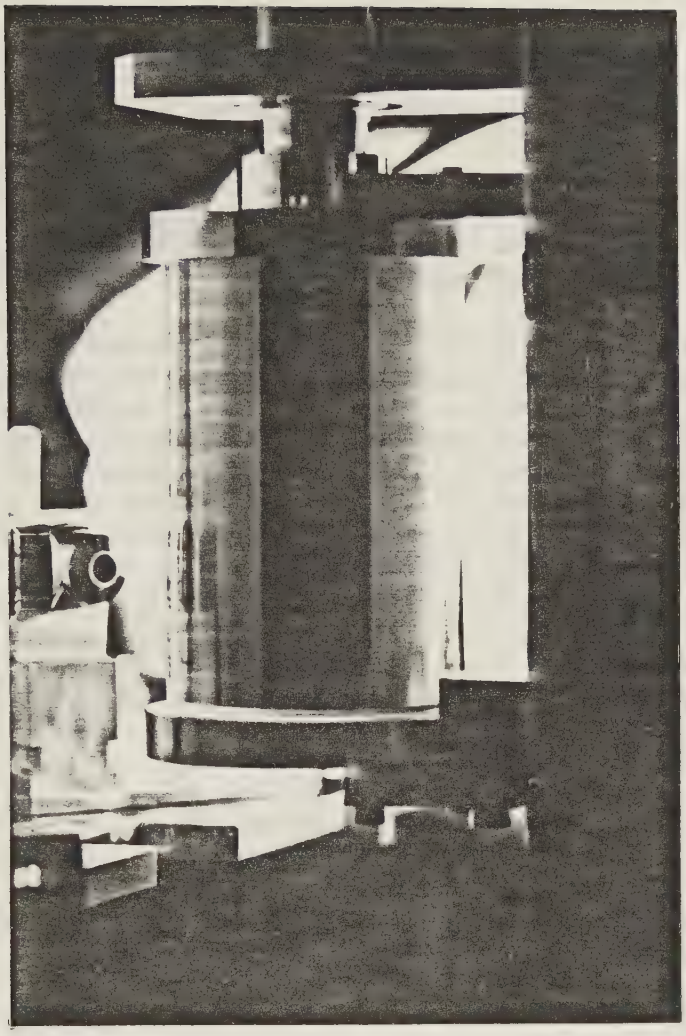


Fig. n° 30. Photographie des " rouleaux de Taylor déformés " en lumière polarisée.

## VI.6 MONTAGE EXPERIMENTAL

### VI.6.1 LE CYLINDRE DE COUETTE

Les mesures optiques qui devaient être effectuées, ont imposé la réalisation d'un montage de cylindres de Couette avec un cylindre extérieur fixe et transparent afin de pouvoir faire des mesures de la lumière diffusée.

Nous voulions d'abord vérifier que, lorsque nous faisions l'analyse de la lumière passant dans l'entrefer, parallèlement à l'axe du cylindre, en mesurant l'effet moyen (ce qui, dans le cas d'un écoulement laminaire n'est pas gênant) nous retrouvions les résultats théoriques, résultats qui avaient déjà été vérifiés expérimentalement par exemple par Wayland [53] [57] ; pour cela il fallait construire deux cylindres ayant un entrefer suffisamment large pour que l'on puisse déplacer le faisceau laser entre les deux cylindres de manière significative.

Finalement, les cylindres, représentés par exemple sur la photographie n°30, ont les dimensions suivantes :

$$R_1 = 30{,}00 \pm 0{,}01 \text{ mm}$$

$$R_2 = 35{,}00 \pm 0{,}01 \text{ mm}$$

la longueur est de 120 mm.
les deux axes sont verticaux et confondus avec une précision inférieure à 100$\mu$m.

A l'aide d'un comparateur, nous avons pu mesurer l'effet du "faux rond" additionné à l'effet de granularité de surface. Pour le cylindre intérieur, on trouve : $|\Delta r| \leqslant 35\mu m$ ce qui, pour une largeur d'entrefer de 5mm, provoque une erreur relative inférieure à 0,7%.

Le cylindre intérieur est entrainé par un servomoteur à courant continu, à entrefer plan et bobinage lamellaire de chez AXEM. Le moteur est équipé d'une génératrice tachymétrique ; l'ondulation résiduelle crête crête est faible et l'erreur absolue sur la constance de la vitesse de rotation est égale à 0,2% de la vitesse nominale.

Un variateur de vitesse AXODYN permet de maintenir la vitesse du moteur égale à la valeur affichée malgré les variations de charge sur l'arbre moteur et les fluctuations de la tension secteur.

Un jeu de poulies de différents diamètres permet de faire varier la vitesse de rotation du cylindre de 0,24 à 62 rd/sec.

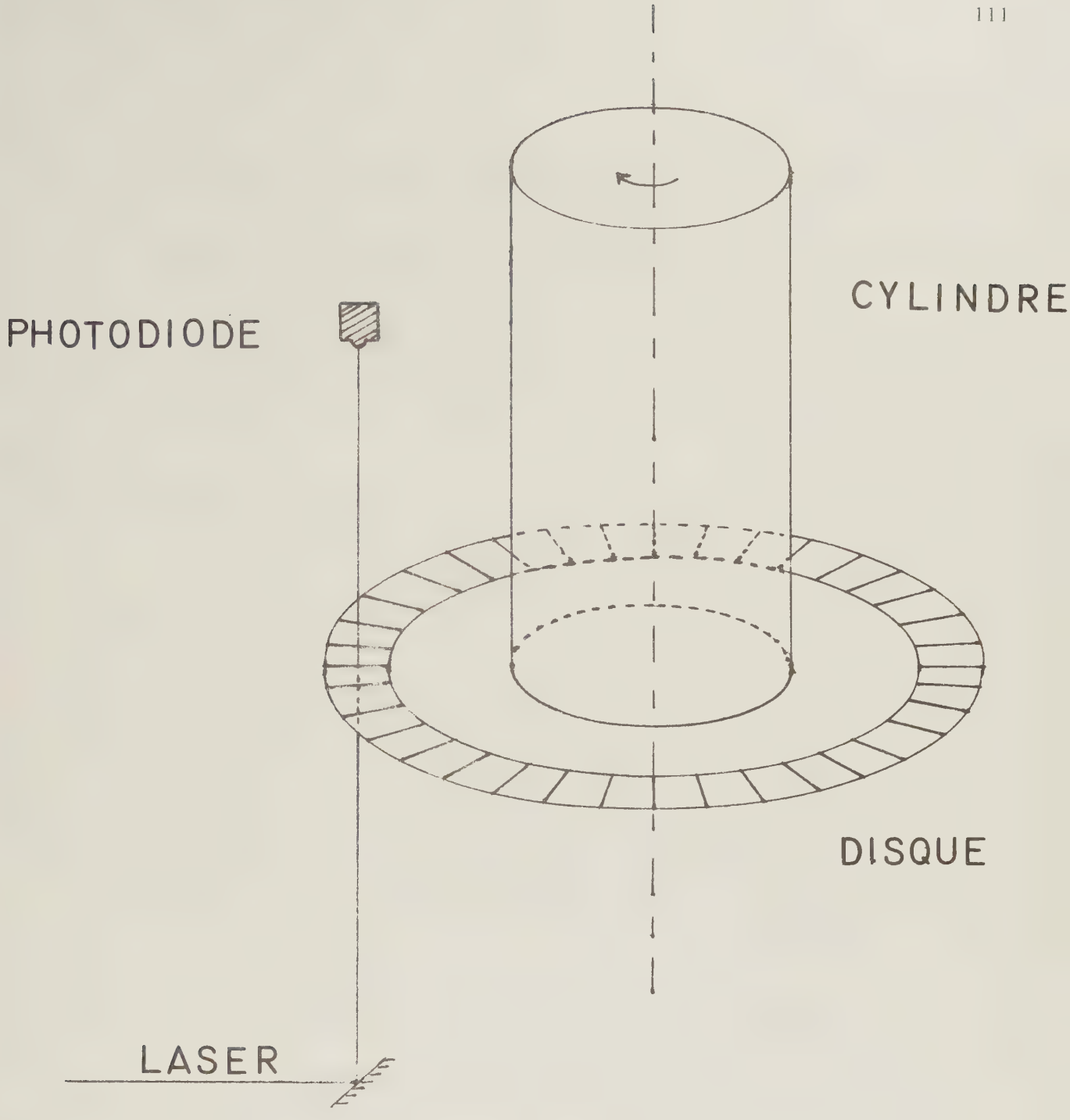



Fig n° 31 : Montage réalisé pour vérifier la constance de la vitesse. Le disque, constitué de dents équidistantes est solidaire du cylindre.

La constance de la vitesse et en particulier l'absence de glissement des courroies des poulies a été vérifiée de la manière suivante :
un disque à dents est fixé sur l'axe du cylindre intérieur, un laser He-Ne envoie un pinceau de lumière parallèle verticalement, la réception de la lumière transmise à travers les dents du disque (cf. dessin n°31) est assurée par une photo-diode reliée à un oscilloscope. La figure observée est un créneau dont les coins sont arrondis mais dont la largeur est constante (avec une précision de l'ordre de 1%), la vitesse peut donc être considérée comme constante, à la précision du système d'asservissement tachymétrique près.

## VI.6.2 LE LIQUIDE BIREFRINGENT

### VI.6.2.1 INTRODUCTION

Nous avons vu précédemment que le liquide devait, d'une part avoir un coefficient de biréfringence élevé puisqu'il fallait pouvoir détecter des gradients de vitesse ponctuels donc des biréfringents dans un très petit volume, d'autre part avoir un comportement newtonien dans la gamme des gradients de vitesse utilisés, c'est à dire qu'il doit exister une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le taux de déformation.

De nombreux liquides tels que l'acide oléïque ou le trans-éthyl-cinnamate ont un comportement newtonien et présentent de la biréfringence d'écoulement mais leur coefficient de biréfringence était trop faible pour effectuer les mesures par diffusion compte tenu de la sensibilité de notre méthode de détection.

Le "milling yellow" est un produit organique qui se présente sous la forme d'une poudre jaune, c'est un produit industriel utilisé comme colorant de textiles.

Ce corps est fabriqué par HOECHST et commercialisé sous le nom de jaune Alphanol H5G.

Nous allons voir que la solution aqueuse de ce corps qui a été déjà utilisée par plusieurs auteurs pour des études de mécanique des fluides répond aux caractéristiques définies ci-dessus [44] [54] [59] [60].

### VI.6.2.2 FABRICATION DE LA SOLUTION AQUEUSE

La poudre se dissout dans l'eau à l'ébullition ; lorsque la dissolution est complète, le liquide est trouble et présente une coloration homogène ocre-jaune.

Cette solution opaque, à partir d'une épaisseur de quelques millimètres, n'est pas directement utilisable ; chaude, elle doit être filtrée sous pression dans un filtre cylindrique Millipore muni de membranes filtrantes dont les diamètres de pores sont de 0,2 $\mu$m.

Le liquide obtenu est jaune très clair et ses caractéristiques de biréfringence et de limpidité ne varient pas dans le temps si toutefois on évite de refroidir trop rapidement la solution. D'autre part, l'eau utilisée doit être distillée et filtrée à l'aide d'un filtre bactéricide pour éviter une contamination ultérieure de la solution qui se traduirait par une perte de limpidité.

Le matériel de filtrage utilisé nous a été prêté par l'institut de mécanique des fluides de l'institut national polytechnique de Toulouse.

Pour connaître la concentration de la solution (donnée très importante car la viscosité dynamique et la biréfringence sont deux fonctions très rapides de la concentration du liquide en "milling yellow") nous utilisons un picnomètre qui permet de déterminer, avec une précision relative d'environ 0,1%, la densité de la solution ; à l'aide des courbes d'étalonnage de la densité en fonction de la concentration pour différentes températures dues aux travaux de Jibawi [56], on peut calculer la concentration correspondante.

### VI.6.2.3 COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DE LA SOLUTION

Les différents auteurs ayant étudié le comportement du "milling-yellow" en particulier Randria [44], Mc. Afee et Pih [54] trouvent tous que le comportement rhéologique varie en fonction des gradients de vitesse utilisés. Ces derniers, par exemple, se référant à des travaux de Hirsh [61] prévoient trois domaines : le premier correspondant aux faibles gradients de vitesse jusqu'à environ 10 $s^{-1}$ (pour une concentration de 1,84%) cette valeur de transition dépend étroitement de la concentration et de la température, le fluide est alors newtonien puis de 10 $s^{-1}$ à environ 500 $s^{-1}$ le fluide est non newtonien, enfin au-dessus le fluide redevient newtonien ce qui concorde assez bien avec les hypothèses précédemment évoquées de Hermans [45] sur l'existence de jonctions temporaires.

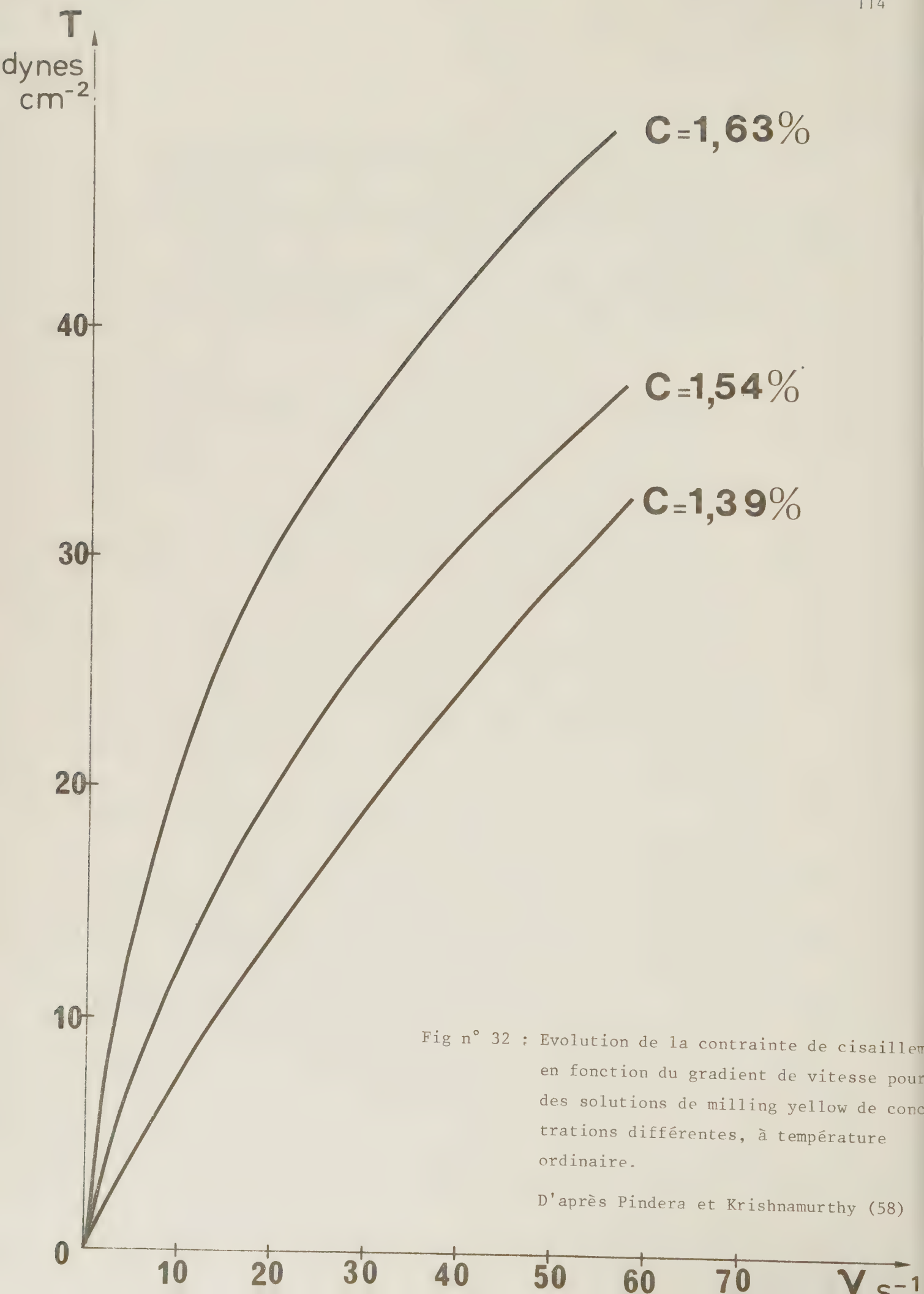


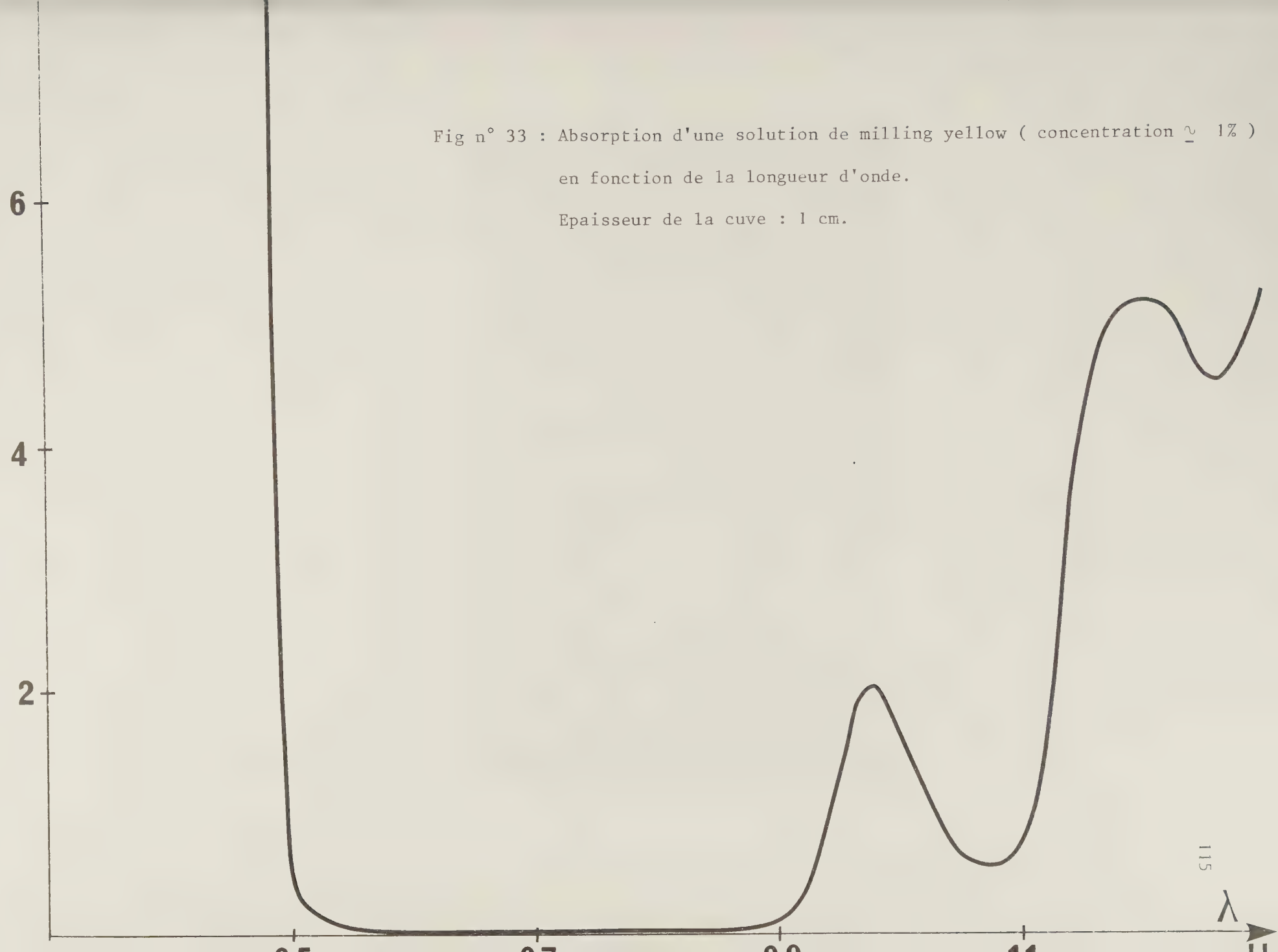

Fig n° 32 : Evolution de la contrainte de cisaillem
en fonction du gradient de vitesse pour
des solutions de milling yellow de conc
trations différentes, à température
ordinaire.

D'après Pindera et Krishnamurthy (58)

Fig n° 33 : Absorption d'une solution de milling yellow ( concentration $\simeq$ 1% )

en fonction de la longueur d'onde.

Epaisseur de la cuve : 1 cm.



Pour des concentrations $\leqslant$ 1%, à la température ordinaire Randria [44] trouve expérimentalement que le fluide est newtonien quelque soit le gradient de vitesse.

Pour des concentrations supérieures, de l'ordre de 1,3%, 1,4% toujours à la température ordinaire, les rhéogrammes (courbes représentant la variation du gradient de vitesse en fonction de la contrainte de cisaillement) semblent pouvoir être assimilés à des droites.

Pindera et Krishnamurthy [57] [58] ont eux aussi étudié en détail le "milling yellow" à des concentrations relativement élevées (1,39% à 1,63%), ils constatent, par exemple, que pour une solution de "milling yellow" à 1,39% et une température de 22°5C le fluide est parfaitement newtonien pour des gradients allant de 0 à une dizaine de $s^{-1}$, pour les gradients plus élevés, la contrainte de cisaillement n'est plus rigoureusement proportionnelle au gradient de vitesse mais l'écart à la linéarité reste faible. La courbe n°32 représente le comportement rhéologique de plusieurs solutions de "milling yellow" d'après les mesures de Pindera et Krishnamurthy [58].

Les gradients de vitesse auxquels nous avons travaillé variant de quelques $s^{-1}$ à quelques dizaines de $s^{-1}$, et les concentrations les plus élevées utilisées se situant entre 1% et 1,4% pour des températures d'environ 24 à 25°C, nous avons le droit d'assimiler le comportement rhéologique du "milling yellow" à un comportement newtonien.

### VI.6.3 REALISATION PRATIQUE

Comme toute méthode utilisant la lumière diffusée, un flux lumineux important doit être envoyé sur la région à étudier ; la solution biréfringente étant très sensible à la température, il faut que la lumière d'analyse soit absorbée le moins possible par le liquide.
La courbe n°33 représente la loi d'absorption d'une solution de "milling yellow" dissous dans de l'eau, la concentration est de 1% et l'épaisseur de la cuve spectroscopique utilisée est de 1cm.
En ordonnée, a été portée l'absorption A qui est reliée à la transmission par la relation $A = - \log_{10} T$ , en abscisse a été portée la longueur d'onde.

On remarque que pour des longueurs d'onde comprises entre 0,6 et 0,9 $\mu$m la transmission est supérieure à 85%, les deux pics d'absorption observés aux environs de 1 $\mu$m et 1,2 $\mu$m sont des pics d'absorption de l'eau.

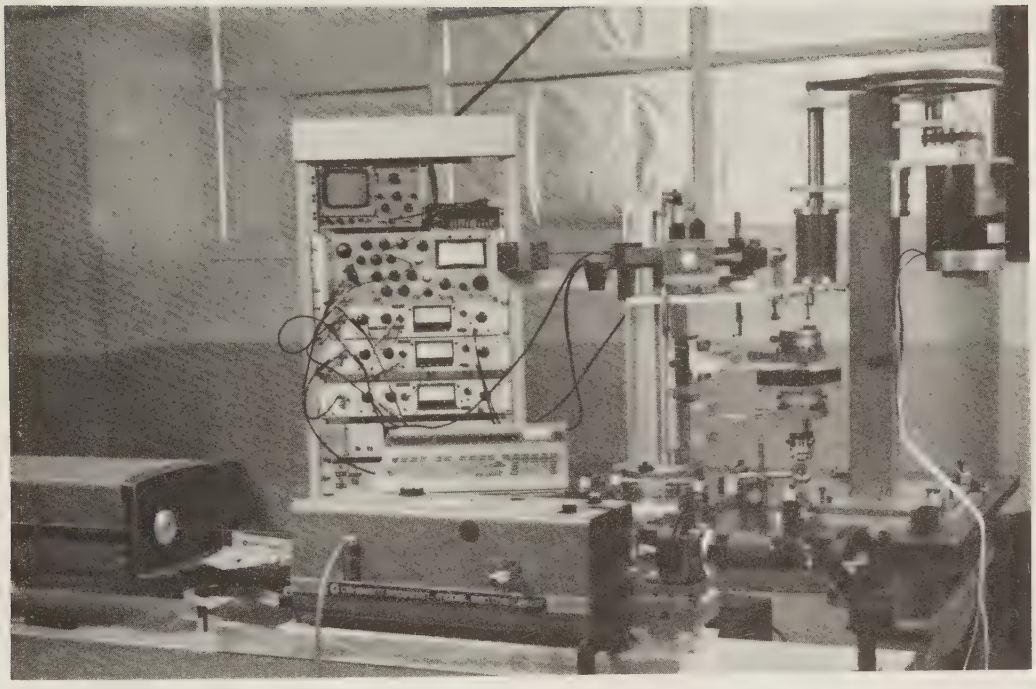


Fig. n°34. Vue générale de l'expérience.

La source choisie est un laser à colorant (rhodamine) pompé par un laser à argon de 10 watts (COHERENT RADIATION).

La gamme des longueurs d'onde utilisables va du jaune au rouge avec une énergie décroissante, par exemple pour 0,62 $\mu$m l'énergie fournie est 300 mW.
Un système optique (un afocal x10 légèrement déréglé) focalise le faisceau à l'intérieur du fluide au point choisi.
Un modulateur photoélastique (cellule MORVUE) module la polarisation de la lumière incidente à une fréquence de 50 KHZ ($\omega$)

Comme cela est expliqué dans le chapitre V, la lumière diffusée est recueillie dans deux directions par deux objectifs de microscope (NACHET x 2,5) qui la focalisent sur deux photomultiplicateurs RTC XP 1117 dont la linéarité, dans les conditions d'utilisation, a été vérifiée ; un diaphragme de diamètre 0,2mm, placé à l'avant des photomultiplicateurs matérialise le champ objet c'est à dire soit le point P soit le point Q de la figure n°19 compte tenu du grandissement de l'objectif, le champ objet a une dimension linéaire d'environ 50 $\mu$m.

Pour alléger l'expérience, nous n'utilisons qu'une seule paire de détecteurs qui est déplacée entre deux mesures couplées (la première concernant P, la seconde le point Q) parallèlement à l'axe du cylindre.

Le signal fourni par chaque détecteur est analysé par deux amplificateurs synchrones (PRINCETON APPLIED RESEARCH) centrés respectivement sur $\omega$ et $2\omega$ et par un amplificateur continu. Les trois signaux analogiques sont envoyés sur une chaine d'acquisition de données ECTRON 6000. Après passage dans une interface appropriée, les mesures recueillies sont utilisées pour calculer en temps réel les différentes matrices $\hat{A}$ (y), $\hat{A}$ (y+ $\Delta$ y) et $\hat{B}$ (y) à l'aide d'un calculateur Hewlett Packard 9825 A.

La photographie n°34 représente l'ensemble de l'expérience.

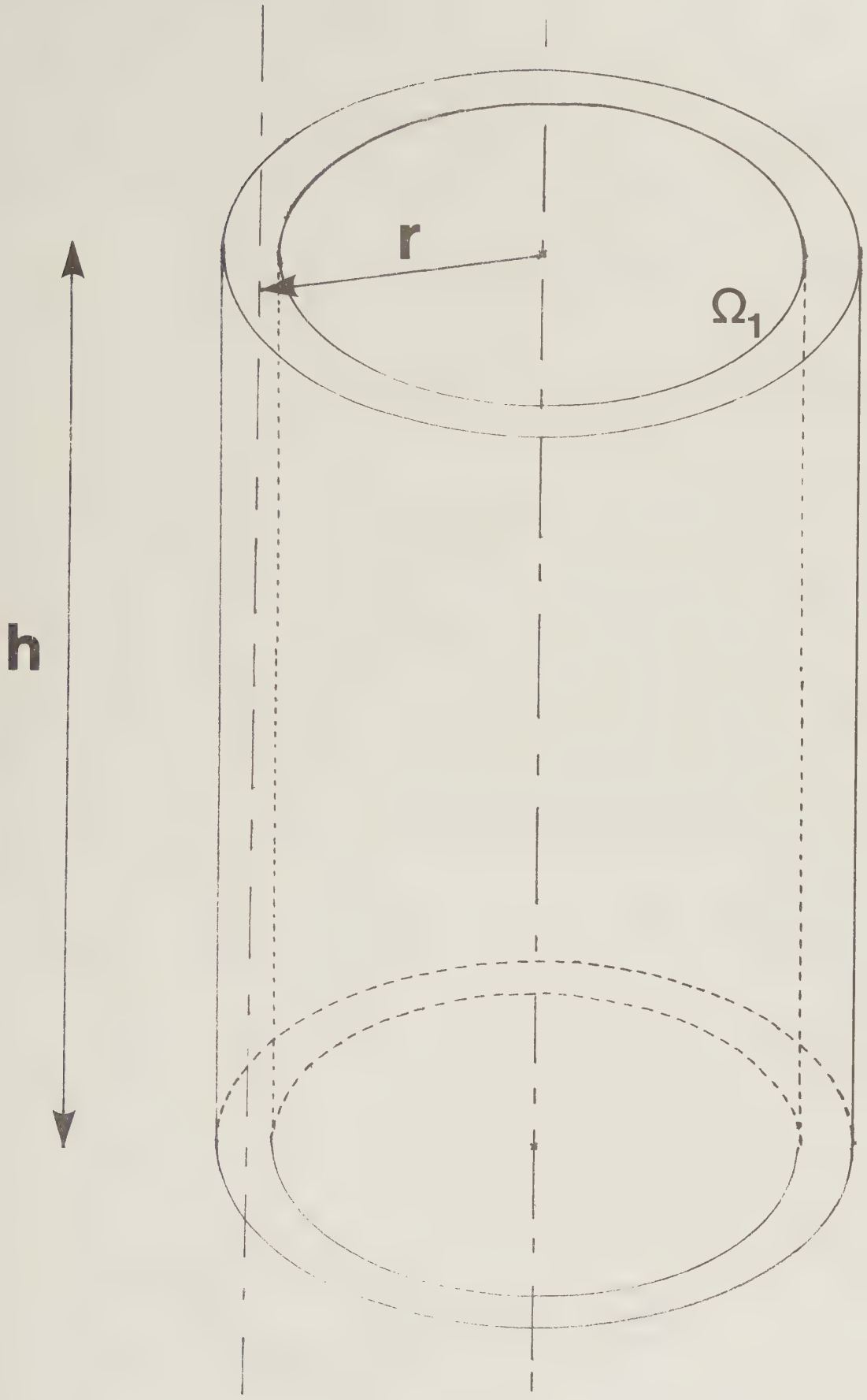
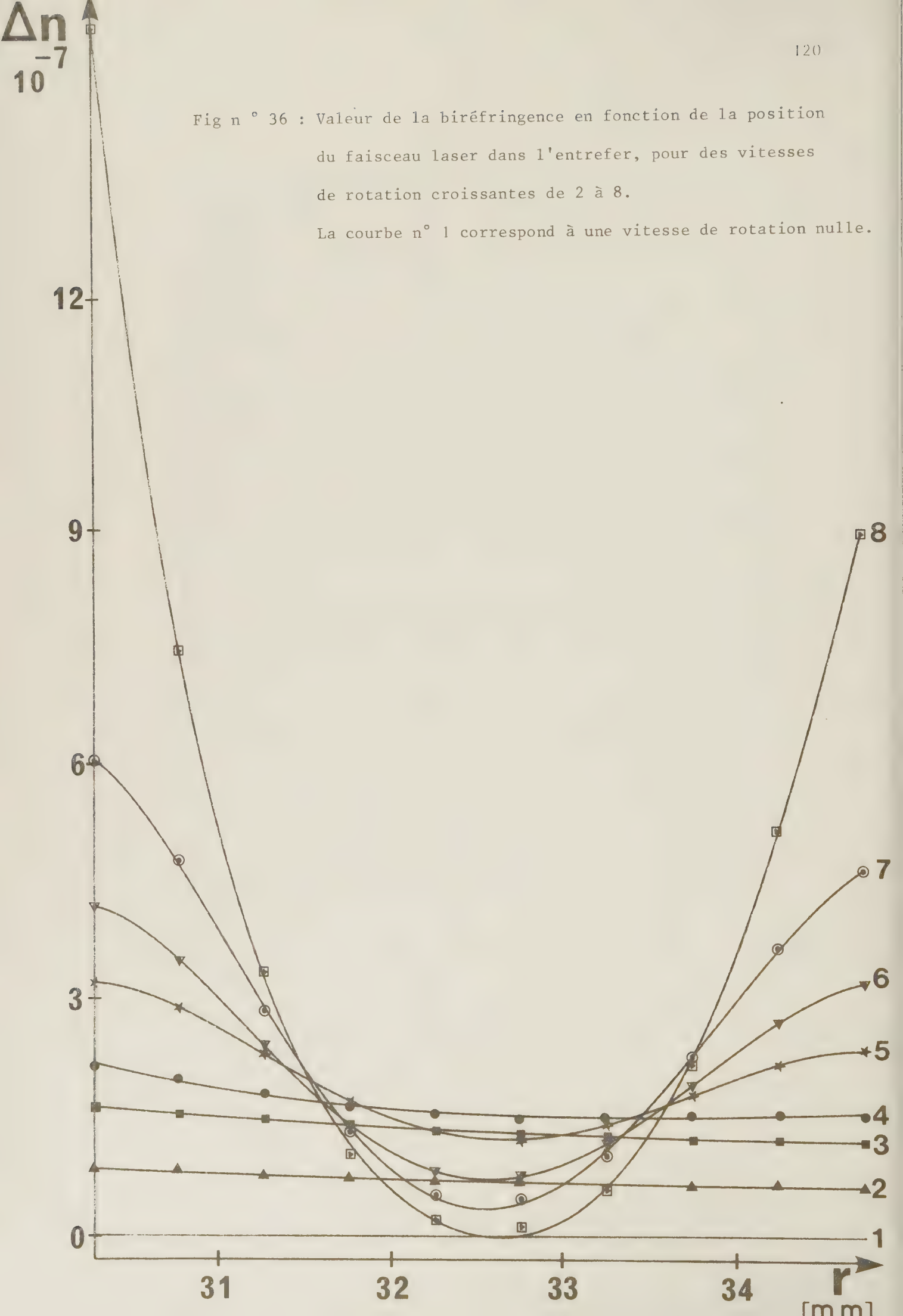



Fig n° 35 : Notations utilisées pour l'étude en transmission.

Fig n ° 36 : Valeur de la biréfringence en fonction de la position du faisceau laser dans l'entrefer, pour des vitesses de rotation croissantes de 2 à 8.
La courbe n° 1 correspond à une vitesse de rotation nulle.



## VI.7 RESULTATS EXPERIMENTAUX :

### VI.7.1 ETUDE DE LA LUMIERE TRANSMISE

Les mesures ont été faites dans des conditions expérimentales comparables à celles utilisées par Wayland [53] avec de l'éthyl-cinnamate situé entre deux cylindres de Couette, seul le cylindre intérieur étant en rotation.

Il s'agit de mesurer la modification de polarisation d'une lumière polarisée circulairement après propagation dans la solution biréfringente, parallèlement à l'axe des cylindres comme le schématise la figure n°35.

La biréfringence $\Delta n$ due à l'effet global de la propagation sur une hauteur h est mesurée à l'aide d'un Stokesmètre suivant la méthode décrite au chapitre IV.
L'étude est faite en fonction de r position du faisceau entre les cylindres et de $\Omega_1$ vitesse de rotation du cylindre intérieur.
La solution biréfringente est du "milling yellow" à une concentration de 0,94%, la température est de 22°C, la longueur d'onde utilisée est 0,63 $\mu$m.

La figure n°36 représente les résultats obtenus dans les conditions suivantes :
Le faisceau d'analyse a un diamètre d'environ 0,4mm.

La courbe n°1 correspond à une vitesse de rotation nulle, c'est à dire à l'absence de biréfringence.

Les courbes n°2 et 3 correspondent respectivement à des vitesses de rotation de 0,52. rd/sec et 0,92 rd/sec, l'écoulement est laminaire.
On sait qu'alors le gradient de vitesse dans l'entrefer s'écrit :

$$\left|\frac{d v_\varphi}{dr}\right| = \frac{\Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(\frac{R_2^2}{r^2} + 1\right) \quad \text{et} \quad \Delta n = \pm \frac{2a\Omega_1 R_1^2 R_2^2}{r^2(R_2^2 - R_1^2)}$$

Le coefficient a (qui ne coïncide avec $\beta$ que dans le cas où $|R_1 - R_2| \ll R_1$) a une valeur constante $2,66 \pm 0,08\ 10^{-8}$ seconde pour la solution étudiée à une longueur d'onde de 0,63 $\mu$m.

La courbe n°4 correspond à une vitesse de 1,13 rd/sec et à un régime de transition.

Les courbes n°5,6,7 et 8 ont été obtenues pour des vitesses respectives de 1,31 rd/sec, 1,56 rd/sec, 2,09 rd/sec et 3,66 rd/sec. Il s'agit de régimes d'écoulement où les rouleaux de Taylor sont bien établis. On retrouve les allures de courbes caractéristiques, déjà publiées par plusieurs auteurs en particulier l'existence d'un minimum pour $\Delta n$ au milieu de l'entrefer (le léger écart par rapport à cette position est due aux imprécisions de mesure, en particulier à la largeur du faisceau) et des valeurs de $\Delta n$ symétriques de part et d'autre du milieu de l'entrefer.

Ces résultats sont compatibles avec les profils de vitesse calculés par Taylor [49].

### VI.7.2 ETUDE DE LA LUMIERE DIFFUSEE

#### VI.7.2.1 CALCUL PRATIQUE DES DIFFERENTES MATRICES

Dans le paragraphe V.3 on expliquait comment à partir de 3 mesures sur chaque photomultiplicateur, en continu et aux fréquences $\omega$ et $2\omega$ , on parvenait à déterminer les différents éléments de la matrice $\hat{A}(y)$ lors d'un premier pointé puis $\hat{A}(y+\Delta y)$ lors d'un second pointé. La matrice correspondant au biréfringent élémentaire était obtenue en effectuant le produit $\hat{A}(y+\Delta y)\hat{A}^t(y)$ et l'on parvenait ainsi à retrouver les caractéristiques du biréfringent associé au volume élémentaire c'est à dire, l'angle entre l'axe optique du biréfringent et un axe de référence, et le retard introduit.
Pratiquement, ces calculs présentent un certain nombre de difficultés :

1°- les mesures effectuées sont très imprécises pour de nombreuses raisons qui seront détaillées dans le huitième paragraphe.

2°- certaines configurations peuvent conduire à des termes nuls qui empêchent l'utilisation du traitement numérique classique.

Nous allons donc détailler ci-dessous, les méthodes de calcul que nous avons utilisées.
Pour simplifier l'écriture, nous choisissons les notations suivantes :

La matrice $\hat{A}(y)$ s'écrit : (cf. Annexe II )

$$\hat{A}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^2+G^2-E^2-F^2 & 2(DE+FG) & 2(DF-EG) \\ 0 & 2(DE-FG) & G^2+E^2-F^2-D^2 & 2(DG+EF) \\ 0 & 2(DF+EG) & 2(EF-DG) & F^2+G^2-E^2-D^2 \end{pmatrix}$$

les quantités mesurées sont a, c, d et f.
En tenant compte des expressions en fonction de D E F G et du fait que les vecteurs lignes et les vecteurs colonnes sont orthonormés, h se déduit toujours facilement par la relation

(70) $$h = cd - af$$

D'autre part :

(71) $b^2 = d^2 + f^2 - h^2$ , (72) $g^2 = c^2 + f^2 - h^2$

Il y a une seule ambiguité de signe car b et g sont liés par la relation :

(73) $$bg = f + a\,h$$

Enfin e et i peuvent être obtenus à partir des relations suivantes :

(74) $e^2 = a^2 - f^2 + g^2$ , (75) $i^2 = a^2 - f^2 + b^2$
(76) $be = -(cf + ad)$ , (77) $gi = -(ac + df)$

e et i sont liés par la relation :

(78) $$ei = a + fh$$

Cet ensemble de relations permet de calculer b, g e et i dans le cas général.
Cependant lorsque certains éléments de la matrice deviennent voisins de zéro, certaines relations deviennent beaucoup trop imprécises.
La méthode de résolution que nous avons adoptée est la suivante : on remarque tout d'abord que si 3 éléments parmi b g e i sont nuls le quatrième élément est nécessairement nul.

- Dans le cas particulier où b, g e et i sont nuls cela implique que les quantités mesurées a c d et f répondent aux conditions suivantes :

  $d = (-1)^n c$ n étant un entier quelconque

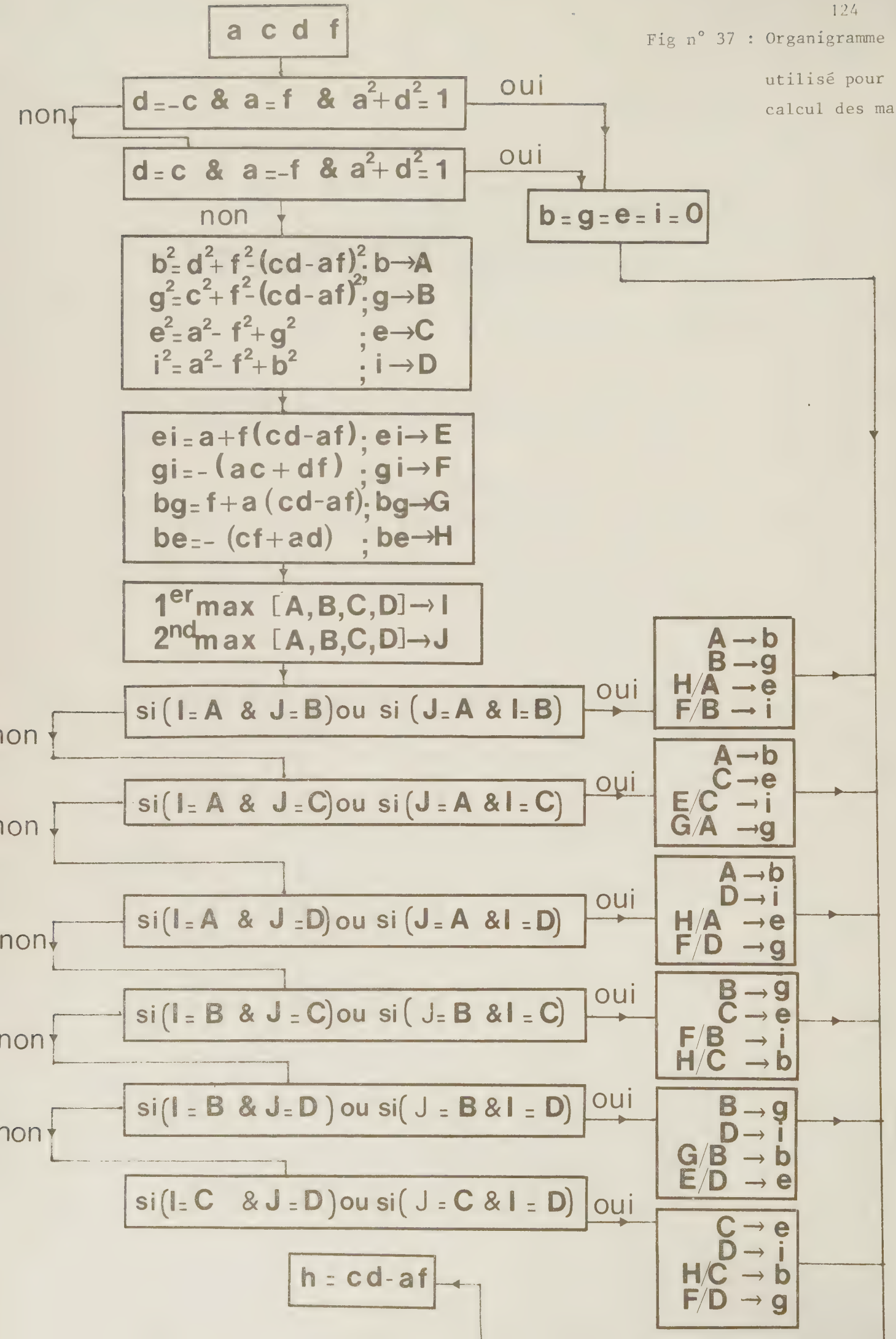
  $a = (-1)^{n+1} f$

  $a^2 + d^2 = 1$

- Dans le cas général, deux termes au maximum parmi b g e i peuvent être nuls.

A l'aide des formules (70) (71) (72) (74) et (75) on calcule $b^2$ $g^2$ $e^2$ $i^2$, on choisit les deux valeurs les plus importantes parmi les quatre obtenues, à l'aide de ces 2 valeurs et des formules (73) (76) (77) et (78) on calcule les 2 autres valeurs.

Fig n° 37 : Organigramme utilisé pour le calcul des matric



L'organigramme que nous avons choisi d'utiliser est représenté sur la figure n°37.
Comme celà est expliqué dans le paragraphe V.3, on aboutit à la formation de deux matrices $\hat{A}^+(y)$ et $\hat{A}^-(y)$.
Puis les mesures sont recommencées au point Q et l'on obtient les matrices $\hat{A}^+(y+\Delta y)$ et $\hat{A}^-(y+\Delta y)$.
L'ordinateur calcule alors, toujours en temps réel, les quatre matrices possibles associées au biréfringent du volume élémentaire. Le volume étant très petit, on a vu que l'on pouvait supposer le biréfringent linéaire ce qui impose, par exemple, que $B_{23} = B_{32}$ que $B_{22} + B_{33} - B_{44} = 1$

En testant les différents éléments matriciels (il est évident que les égalités ne sont jamais strictement obtenues à cause des imprécisions de mesure , on teste donc la validité de relations du type $B_{23} - B_{32} < \epsilon$ , $\epsilon$ étant une donnée introduite qui dépend des conditions expérimentales) deux des matrices $\hat{B}$ parmi les quatre obtenues disparaissent, les deux matrices restant correspondent au même biréfringent au signe près (ce qui était prévu par une simulation numérique). $B_{44}$ fournit directement $\sin\delta$, $B_{42}$ ou $B_{43}$ sont utilisés pour obtenir la valeur de $\theta$ .

### VI.7.2.2 ETALONNAGE

Pour étalonner les différentes voies, on utilise des biréfringents connus et l'on ajuste les gains des différents appareils pour retrouver les matrices correspondantes.

- aucun biréfringent
  la matrice obtenue doit être la matrice unité donc

  a = 1,00 c = 0,00 d = 0,00 f = 0,00

- lame 1/4 d'onde dont l'axe rapide est parallèle à la direction de référence :

  a = 1,00 c = 0,00 d = 0,00 f = 1,00

- lame 1/4 d'onde dont l'axe rapide est à 45° de la direction de référence :

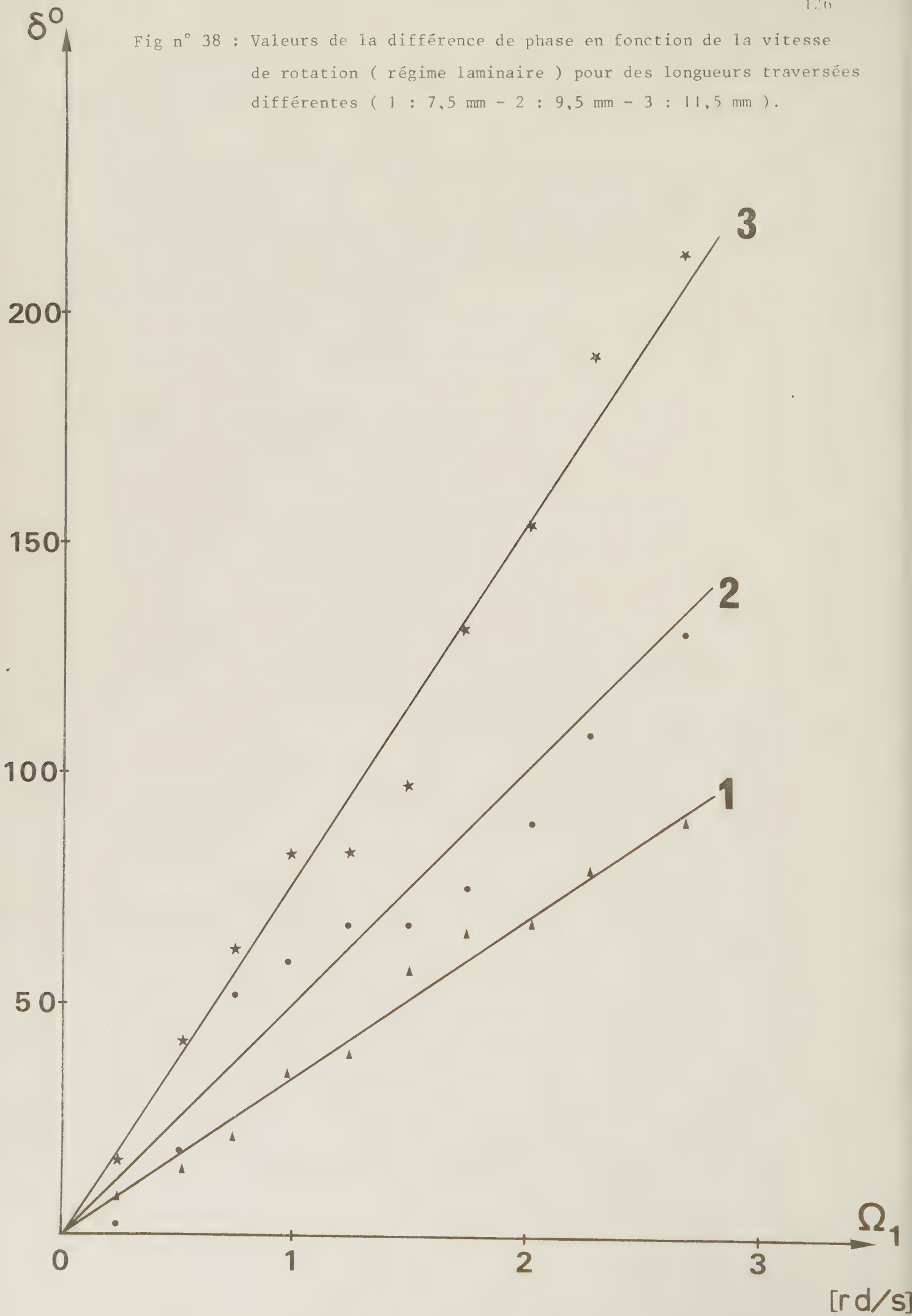
  a = 0,00 c =-1,00 d = 0,00 f = 0,00

- lame 1/4 d'onde dont l'axe rapide est à $\frac{\pi}{8}$ de la direction de référence :

  a = 0,50 c =-0,71 d = 0,50 f = 0,71

Compte tenu des imprécisions causées par la réalisation pratique du montage expérimental (en particulier la présence d'impuretés diffusantes dans le liquide), ces étalonnages sont réalisés avec une précision absolue de $\pm$ 0,03.

Fig n° 38 : Valeurs de la différence de phase en fonction de la vitesse de rotation ( régime laminaire ) pour des longueurs traversées différentes ( 1 : 7,5 mm - 2 : 9,5 mm - 3 : 11,5 mm ).



### VI.7.2.3 RESULTATS OBTENUS LORS D'UN ECOULEMENT LAMINAIRE

Le but était la vérification de l'expression établie dans le paragraphe 5 :

(79) $$\Delta n = \pm \frac{2\Omega_1 a\, R_1^2\, R_2^2}{r^2 (R_2^2 - R_1^2)}$$

Plus précisemment, nous nous sommes attachés à montrer la dépendance linéaire de $\Delta n$ en fonction de $\Omega_1$ .Pour ce faire, nous mesurons la différence de phase $\delta = \frac{2\pi \Delta n\, y}{\lambda}$ ,

y représente la longueur NP (cf. figure n°19) pour différentes valeurs de la vitesse de rotation $\Omega_1$.

Simultanément, les mesures de $\theta$ étaient faites ; la valeur trouvée peut être considérée comme constante, compte tenu de la précision obtenue pratiquement.

Afin de minimiser les perturbations causées par l'inhomogénéité du liquide, dix acquisitions successives sont faites pour chaque mesure, le résultat est la moyenne de ces dix valeurs. Le temps d'acquisition et de traitement d'un vecteur est de 20 msec.
La figure n°38 montre les résultats obtenus pour une solution de "milling yellow" dont la concentration était de 1,4%, la température étant d'environ 23°C.
La longueur d'onde du faisceau laser était de 0,62 $\mu$m.

Il faut remarquer que la valeur de $\delta$ est obtenue à partir de sin $\delta$ donc au voisinage de 90°, la fonction sin $\delta$ présente un extremum, les valeurs de $\delta$ deviennent donc très imprécises.
On peut cependant tirer de ces mesures la conclusion suivante :

$\delta$ donc $\Delta n$ varie linéairement avec $\Omega_1$.

De plus, la courbe n°1 correspond à un trajet NP de 7,5mm
la courbe n°2 correspond à un trajet NP de 9,5mm
la courbe n°3 correspond à un trajet NP de 11,5mm

En prenant en compte les effets de bord, en effet dans notre configuration le point N correspondant à un hublot d'entrée, $\delta$ peut être considérée comme à peu près proportionnelle à y comme le prévoit la théorie.

### VI.7.2.4 RESULTATS OBTENUS EN PRESENCE DES ROULEAUX TAYLOR

Il s'agit ici de la manipulation finale, c'est à dire la mesure du biréfringent correspondant à un volume élémentaire, grâce à l'analyse de la lumière diffusée selon la méthode explicitée dans les paragraphes 2 et 3 du chapitre V.
Nous nous sommes attachés aux deux vérifications suivantes :

- constance de $\theta$ durant une expérience,
- dépendance périodique de $\Delta n$ en fonction de y comme le prévoit l'équation $[68]_{ter}$

De nombreuses difficultés technologiques ont surgi lors de cette expérience.
Tout d'abord la présence d'impuretés diffusantes dans le liquide perturbe les mesures malgré les moyennes qui sont réalisées en particulier à cause du fait suivant :

pour chacun des détecteurs, les acquisitions se font successivement sur les fréquences 0, $\omega$ puis $2\omega$ pour un détecteur donné. De la valeur recueillie sur la fréquence 0, on déduit $I_o$ et les valeurs recueillies sur les fréquences $\omega$ et $2\omega$, divisées par cette valeur $I_o$ fournissent a, c, d et f, on conçoit que si la valeur de $I_o$ change (parce qu'à un moment donné, est passée une impureté très diffusante) pendant les différentes mesures, les résultats finaux deviennent erronés ; le fait d'effectuer des moyennes atténue cet inconvénient mais ne peut le faire disparaître.
De plus, le "milling yellow" est un liquide dont les caractéristiques optiques et rhéologiques varient très rapidement avec la température ; comme nous sommes obligés de faire des moyennes donc d'augmenter le temps de mesure c'est à dire le temps de rotation, le liquide s'échauffe, sa viscosité change ce qui peut amener la dégradation de rouleaux de Taylor au départ bien établis comme nous l'expliquerons lors de l'étude de la figure n°40.
Il faut enfin noter que le régime d'écoulement observé s'écarte parfois de celui prévu par la théorie ; récemment, R.J. Donnelly [62] a signalé, par exemple, l'apparition de perturbations pour des vitesses de rotation très inférieures à la vitesse critique. Les mesures effectuées sont donc très imprécises mais ceci n'est pas trop gênant dans la mesure où nous nous proposions seulement de montrer qu'il était possible de détecter l'apparition de gradients de vitesse locaux et non pas d'effectuer des mesures de gradients de vitesse à l'intérieur d'un écoulement de Couette.

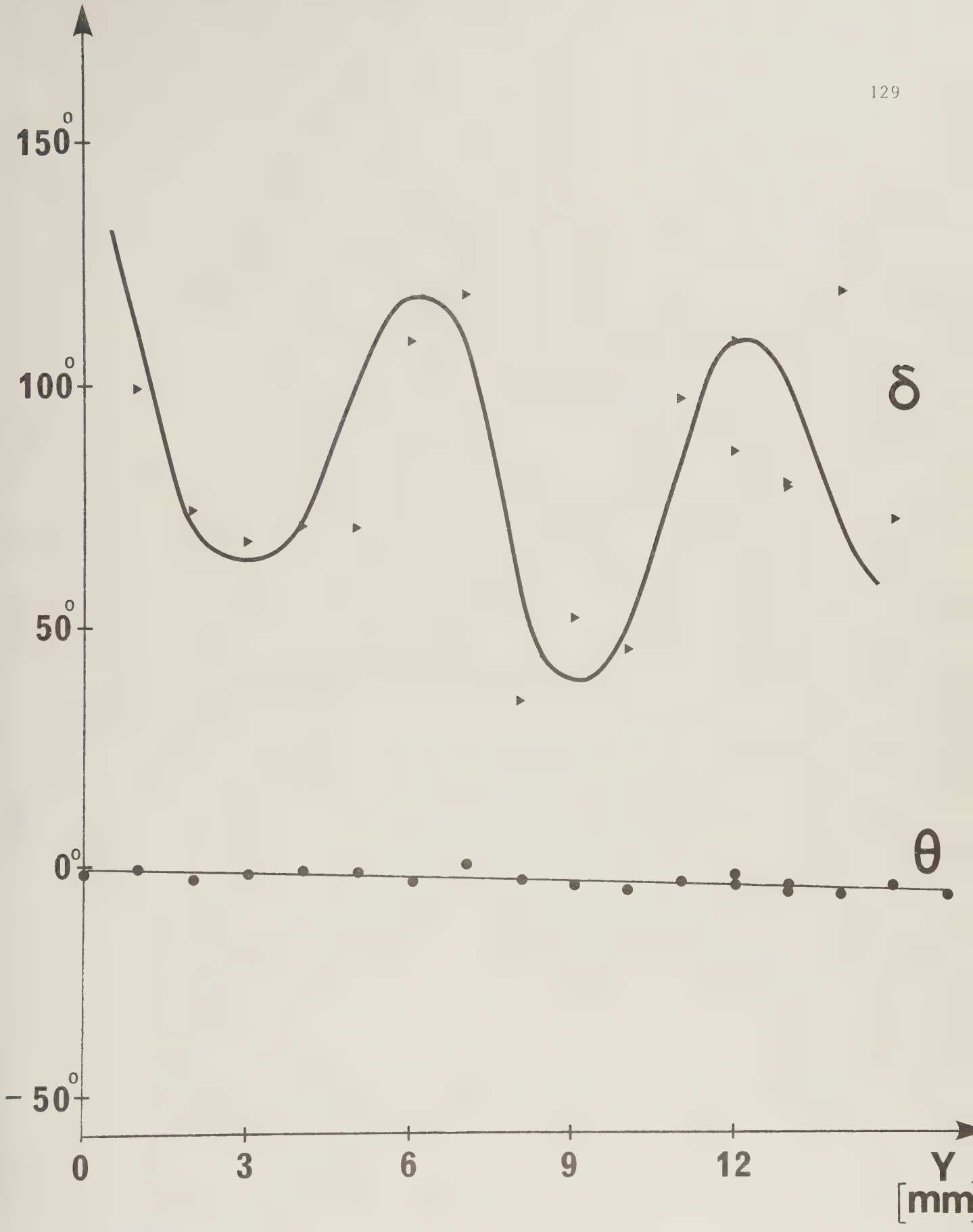



Fig n° 39 : Etude d'un biréfringent local situé à l'intérieur d'un rouleau de Taylo
( pas d'exploration : 0,5 mm ) .
Moyenne sur 15 mesures.

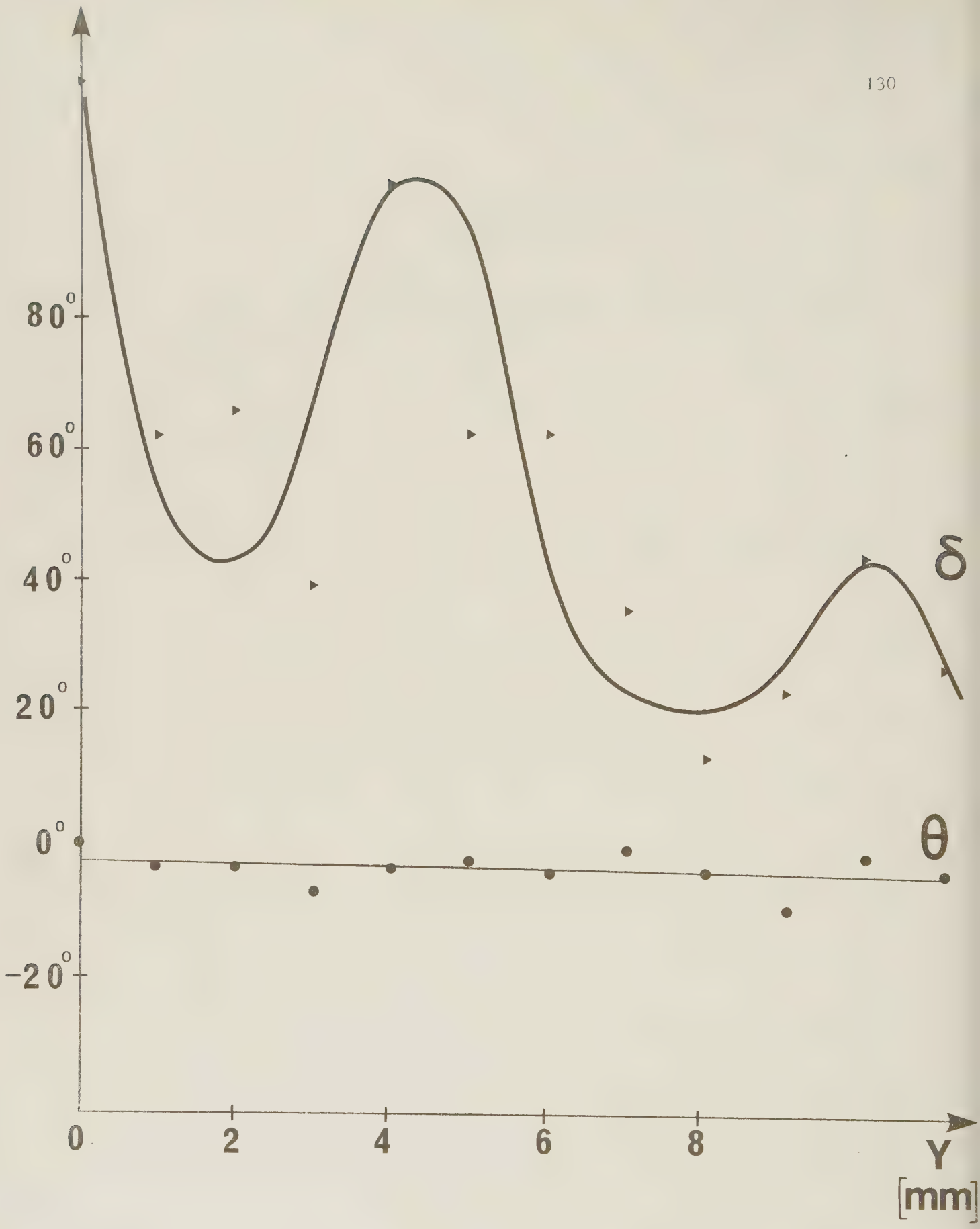



Fig n° 40 : Etude d'un biréfringent local situé à l'intérieur d'un rouleau de Taylor ( pas d'exploration : 0,5 mm ).
Moyenne sur 25 mesures.

La figure n°39 regroupe les résultats obtenus pour une expérience donnée : la solution de "milling yellow" avait une concentration d'environ 1,3%, la température était de 22°C. La présence des rouleaux était simplement vérifiée à l'aide d'un polariseur (cf.figure n°28) afin de ne pas perturber l'écoulement et les mesures par la présence de particules étrangères dans le liquide. Un rouleau de Taylor entier, constitué en fait de deux rouleaux tournant en sens contraire (cf. figure n°25) avait une hauteur totale d'environ 15mm, il est difficile de préciser cette valeur les contours des rouleaux n'étant pas parfaitement bien définis. La valeur de $\Delta y$ est de 0,5mm et l'on vérifie que pour $\Delta y = 0$, $\delta$ est bien nul.

Les moyennes sont effectuées sur 15 mesures.
On voit clairement sur la figure n°39, d'une part, que $\theta$ est à peu près constant, d'autre part que la variation de $\delta$ donc de $\Delta n$ en fonction de y est périodique, la période est d'environ 7mm c'est à dire la moitié de la période spatiale d'un rouleau de Taylor ce qui est normal puisque la méthode de mesure que nous proposons permet la détermination de la valeur absolue de $\Delta n$ ; chaque rouleau élémentaire, quel que soit son sens de rotation, provoque le même effet biréfringent, la période spatiale de $\Delta n$ doit donc bien correspondre à la demi-hauteur d'un rouleau de Taylor complet.

La figure n°40 regroupe les résultats obtenus lors d'une seconde série d'essais. La solution de "milling yellow" utilisée avait une concentration de 1,3%, la température était de 22°C, la hauteur totale d'un rouleau était de 15mm. $\Delta y$ vaut toujours 0,5mm Les moyennes sont effectuées sur 25 mesures.

Comme précédemment, on voit que $\theta$ peut être considéré comme constant avec une assez bonne précision, la variation de $\Delta n$ en fonction de y est encore périodique avec une période d'environ 7mm ce qui est compatible avec la hauteur totale d'un rouleau comme cela est expliqué ci-dessus ; par contre on constate que lorsqu'y croit $\delta$ donc $\Delta n$ diminue et même s'annule à partir d'un certain moment, $\theta$ étant alors indéterminé ; l'explication est la suivante :

la manipulation a été effectuée suivant les valeurs croissantes de y et, les moyennes étant faites sur un grand nombre de mesures pour tenter de s'affranchir de l'influence des impuretés diffusantes, la température a augmenté, la viscosité a diminué et le régime d'écoulement a changé : lorsque l'on observe le cylindre à travers un polariseur linéaire, on constate que les rouleaux sont bien désorganisés.

## VI.8 CONCLUSION

La faisabilité de la méthode vient donc d'être démontrée et il serait possible d'utiliser ce principe pour détecter des gradients de vitesse transitoires.
Il faudrait, pour cela, apporter quelques modifications au système décrit ci-dessus.

- Tout d'abord, le nombre de détecteurs devrait être doublé pour pouvoir déterminer $\hat{A}(y)$ et $\hat{A}(y + \Delta y)$ au même instant comme le prévoyait la théorie.
- Ensuite le système d'acquisition de données devrait subir quelques modifications, en particulier il faudrait utiliser des échantillonneurs bloqueurs pour faire les mesures sur le continu et sur les fréquences $\omega$ et $2\omega$ rigoureusement au même instant afin de connaître la valeur exacte de l'intensité intervenant dans les informations recueillies sur les fréquences $\omega$ et $2\omega$.

Enfin, si l'on s'intéresse à la partie antisymétrique du gradient de vitesse, il serait possible de compléter cette étude par une expérience utilisant un liquide présentant du dichroïsme d'écoulement.

# VII. CONCLUSION GENERALE

La première partie de cette étude concerne la propagation d'une onde monochromatique dans un écoulement gazeux laminaire. Après un rappel sur la théorie concernant la biréfringence d'écoulement dans les gaz, la matrice de Jones correspondant à un fluide gazeux en écoulement laminaire a été calculée ; dans le cas de l'air une étude expérimentale en soufflerie a permis de vérifier les hypothèses formulées et de mesurer la valeur de $\beta$ malgré la présence de fluctuations thermiques.

La seconde partie concerne la diffusion d'une onde monochromatique par un fluide gazeux ou liquide en mouvement ou soumis à des fluctuations isotropes de son indice de réfraction, causées le plus souvent par des fluctuations thermiques. Dans les deux cas la matrice de Mueller peut être calculée.

La dernière partie propose une méthode de détection et de mesure de gradients de vitesse ponctuels à l'intérieur d'un fluide ne causant aucune perturbation au milieu. Après avoir décrit le matériel mis au point pour pouvoir effectuer, avec la précision voulue, les mesures nécessaires, nous décrivons la manipulation de faisabilité réalisée au laboratoire ainsi que les résultats obtenus.

Les travaux présentés ci-dessus qui, actuellement, ont été publiés en grande partie [21] [25] [28] peuvent ainsi être utilisés directement pour résoudre les deux problèmes suivants :

- détermination complète du vecteur de Stokes d'une onde traversant un milieu en mouvement ou diffusée par ce milieu,
- détection d'un gradient de vitesse local, même transitoire à l'intérieur d'un fluide, par analyse polarimétrique de la lumière diffusée par ce milieu.

La possibilité de mesures locales très rapides de la biréfringence dans un liquide approprié permet d'envisager l'étude de différents régimes laminaires et peut être un jour l'étude de phénomènes turbulents.

Reprinted from APPLIED OPTICS, Vol. 16, page 1993, July 1977
Copyright 1977 by the Optical Society of America and reprinted by permission of the copyright owner.


# Capacity of polarization and amplitude modulated links in the presence of atomospheric scintillation

B. F. Lamouroux and B. S. Prade

A transmission channel may be characterized by its capacity, i.e., the largest quantity of mean mutual information transmitted between the emitter and the receiver. The channel we have studied is a light beam traveling in the low atmosphere, and the capacity has been calculated for polarization (PCM/PL) and intensity (IM) modulation, assuming a Poisson detection process and log-normal fluctuations for scintillation. The depolarization of light has been neglected, and the polarizers have been considered perfect. The appended graphs show that PCM/PL modulation has a greater capacity in all investigated cases.

## Introduction

In most optical transmission systems, the intensity of the carrier wave is modulated. A binary on–off signal generates currents in a detector which are decoded with reference to some threshold. Atmospheric optical links suffer from absorption, particularly when it is foggy, snowing, etc., and turbulence, which gives rise to scintillation, beam steering, etc. The fluctuations of the detected current may be countered by an adjustable threshold.

The bit error probability in an on–off modulated binary communication channel with atmospheric scintillation has been investigated by Webb and Marino,[1] who showed its dependance upon average signal power and noise power.

A few investigations of transmission systems using the modulation of polarization have been carried out. The alteration of an initially polarized light wave propagating through a turbulent atmosphere may be described as an admixture of the component with orthogonal polarization plus an admixture of depolarized light, but the experiments performed by Bradford and Turner[2] and Hohn[3] have shown that the depolarization of light through a turbulent channel is completely negligible when the atmosphere is transparent. The only change is then connected with the state of polarization of light.

The performances of two communication systems using binary amplitude and binary polarization modulation have been compared by Tycz *et al.*[4] They considered a laser beam directed at a moving receiver where signal fading is induced by tracking error. They calculated the average probability of bit error as a function of the pointing accuracy. A definite advantage in favor of the polarization modulation was shown to exist under such conditions.

A similar comparison is made in this paper, where we considered a laser beam reaching a fixed receiver through a section of turbulent atmosphere. The latter is supposed transparent. Intensity fluctuations accompanying the scintillation have a log-normal density, the variance of which is an important parameter.

For the assessment of the performance of a communication channel, we may use $P_E$, the bit error probability. Let $Q$ and $(1 - Q)$ be the *a priori* probabilities for the emission of the signs 1 and 0, $P_D$ the probability of correct detection for 1, $P_F$ the probability of a false alarm, (decoding 1 when 0 has been sent) $P_E = Q(1 - P_D) + (1 - Q)P_F$ can be evaluated provided $P_D$,$P_F$ are known functions of the signal and noise power in the channel. However, the loss of information in the channel is not characterized by $P_E$ alone.

The rate of transmission of information from a given source through a channel has been defined by Feinstein.[5] It is also called the "mutual quantity of information" between the input and the output of the channel. When $H(X)$, $H(Y)$, are the entropies of the input and outpout signals and $H_X(Y)$ and $H_Y(X)$ the conditional entropies, the rate of transmission of information has the expression $I(X,Y) = H(X) - H_Y(X) = H(Y) - H_X(Y)$. The capacity of the line $C$ is defined as the maximum of $I(X,Y)$ for all possible ergodic sources when $P_D$,$P_F$ remain constant.

This capacity characterizes the performance of the channel and is independent of the source.

Using the above notations, the rate of transmission of information has the following expression (which shows that it is not a function of $P_E$):

The authors are with Ecole Polytechnique—Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Laboratoire d'Optique Appliquée, Batterie de l'Yvette, 91120-Palaiseau, France.

Received 23 September 1976.

$$I(Q) = Q(1 - P_D)\log(1 - P_D) + P_D \log P_D]$$
$$+ (1 - Q)[(1 - P_F)\log(1 - P_F) + P_F \log P_F]$$
$$- [Q(1 - P_D) + (1 - Q)(1 - P_F)]$$
$$\times \log[Q(1 - P_D) + (1 - Q)(1 - P_F)]$$
$$- [QP_D + (1 - Q)P_F] \log[QP_D + (1 - Q)P_F].$$

The base of the logarithm is 2. The theory of information shows that $0 < I(Q) < 1$ for given $P_D$, $P_F$ in the range $0 < Q < 1$.

The maximum of $I(Q)$ usually takes place for a single value of $Q$ called the optimum ($Q_{opt}$). This defines the best coding with regard to $P_D$ and $P_F$. Since the latter are functions of $S$ = mean number of signal photoelectrons received during the integration time $T$ and $b$ = mean number of noise photoelectrons counted within the same interval, we may consider $C$ as a function of $S$ and $b$ instead of $P_D$, $P_F$ and look for the value of $S$, which brings $C$ to a chosen value in the presence of a given number $b$.

The method we follow in the calculation is essentially the same in Peters' and Arguello's paper.[6] In a previous paper[7] we assumed a Gaussian detection process in all cases, and we found that the capacity of an optical polarization modulated link (PCM/PL) is greater than the capacity of an intensity modulated link (IM). In this study we extend the above results and calculate the capacity for IM and PCM/PL modulated links. Fried[8] has shown that the Poisson statistics account for both the photon shot noise and the photoelectron shot noise. We take this result into account. As usual the scintillation is assumed to follow a log-normal law.[9] The depolarization of light through the atmosphere was neglected in the PCM/PL case. Additionally we assumed that the polarizers were perfect, i.e., that the cross coefficient was equal to zero. Therefore the noise is independent of the signal intensity. This assumption can be made because of the small values of the noise relative to the signal.

Numerical applications are carried out for different cases. For each case, we plot the ratio of the power necessary in order to obtain a given capacity in a PCM/PL system to the power permitting the same capacity in an IM system as a function of the intensity of the signal for a given noise and variance of log-intensity fluctuations from 0.05 to 2.5.

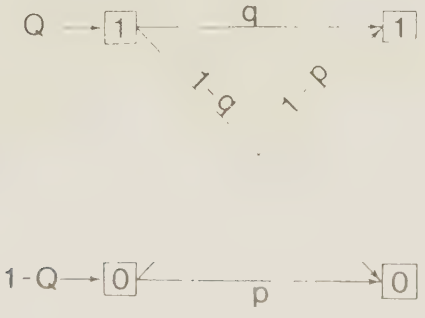



Fig. 1. Diagram of probabilities (IM): $Q$, *a priori* probability emission of digit 1; $q$, probability to detect a 1 given that a 1 was sent; $p$, probability to detect a 0 given that a 0 was sent.

### Intensity On–Off Modulation

We employed the well-known method whereby the signal is sampled, then quantified. The encoding is binary and such that during each fixed time interval $T$ there can be transmitted either a digital 1: a pulse containing an average number of $s$ photons; or a digital 0: no pulse.

At the receiving end, the detector produces and counts a quantity of $n$ photoelectrons during each time interval $T$. The decision rule is the normal way of using a quantic detector. Assuming a threshold count $k$, $n < k$ means that we have received the digit 0, and $n \geq k$ means that we have received the digit 1.

Figure 1 shows the diagram of probabilities. The relative frequency of signs 0 and 1 in the initial message are $P_0 = 1 - Q$ and $P_1 = Q$.

The application of the first formula gives

$$I = -[\omega \log_2 \omega + (1 - \omega)\log_2(1 - \omega)]$$
$$+ Q[(1 - q)\log_2(1 - q) + q \log_2 q]$$
$$+ (1 - Q)[(1 - p)\log_2(1 - p) + p \log_2 p],$$

where $\omega = Qq + (1 - Q)(1 - p)$ is the probability of obtaining sign 1 in decoded message.

The bit error probability is $P_E = Q_{max}(1 - p) + (1 - Q_{max})(1 - q)$, where $Q_{max}$ is the value of $Q$ which maximizes $I$.

The probabilities $p$ and $q$ are given by[7]

$$p = Pr(n < k) = \sum_{n \leq k-1} \frac{\exp(-b)b^n}{n!},$$

$$q = \langle Pr(n > k) \rangle = \left\langle \sum_{n \geq k} \exp -(Se^{2x} + b)\frac{(Se^{2x} + b)^n}{n!} \right\rangle,$$

where $\langle \quad \rangle$ means the expectation value, i.e., averaging on parameter $x$.

$x$ is the neperian logarithm of the amplitude. It is a Gaussian random variable of mean value $-\mu^2$ and variance $\mu^2$. (This relation between mean value and variance is a result of the intensity conservation law; it has been verified experimentally by Gravecha and Gurvich.[10]) $b$ is the mean number of noise photoelectrons received during the time interval $T$. S is the mean number of signal photoelectrons received during the time interval $T$.

After some algebra, we arrive at the following equations:

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X)dX \int_0^{Se^{2X}+b} \frac{e^{-\theta}\theta^k d\theta}{k!},$$

$$p = 1 - \int_0^b \frac{e^{-\theta}\theta^k d\theta}{k!},$$

where

$$P(X) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(X + \mu^2)^2}{2\mu^2}.$$

$p$ and $q$ can be expressed in terms of the incomplete gamma function:

$$q = \frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty} P(X)\gamma(k + 1; Se^{2X} + b),$$

$$p = 1 - \gamma(k + 1; b).$$

For different values of the threshold $k$, we have cal-

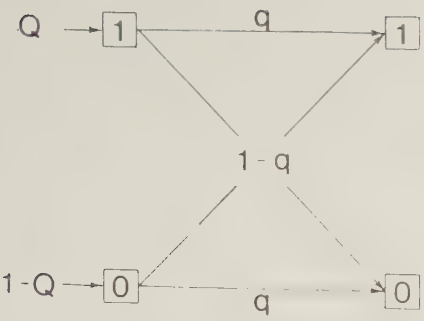



Fig. 2. Diagram of probabilities (PCM/PL): $Q$, *a priori* probability emission of digit 1; $q$, probability to detect a 1 or a 0 given that a 1 or a 0 was sent.

culated the probabilities $p$ and $q$ and the capacity $C$ on a UNIVAC 1110 computer. The maximum value of the capacity, as a function of $k$, has been taken for comparative purposes independent of the actual choice of the threshold.

### Polarization Modulation

Digits are distinguished by means of two orthogonal linear vibrations:

digit 1: polarization along axis $o\mathbf{x}$;

digit 0: polarization along axis $o\mathbf{y}$.

At the receiving end there are two detectors. One receives waves polarized along $o\mathbf{x}$ and produces and counts $n_x$ electrons during the time interval $T$; the other receives waves polarized along $o\mathbf{y}$ and produces and counts $n_y$ electrons during the same time interval.

The decision rule is

$n_x > n_y$ means that we have received the digit 1;

$n_y < n_x$ means that we have received the digit 0.

If $n_x = n_y$, the coded indication is indifferently attributed to 1 or 0. Figure 2 shows the diagram of probabilities.

The probability that the received digit be identical to the emitted one is the same for 0 and 1, since the two digits have similar attributes if we assume an isotropic atmosphere. In this situation, the channel is binary symmetric. The max of $I(Q)$ occurs when $Q = \frac{1}{2}$, and its value is

$$C = 1 + q \log_2 q + (1 - q) \log_2 (1 - q),$$

where $q$ is given by

$$q = (P_r(n_x > n_y) + \tfrac{1}{2} P_r(n_x = n_y))$$

Assuming the depolarization to be negligible

$$P_r(n_x > n_y) = \sum_{n=0} \sum_{m=1} \exp - (Se^{2X} + b_x + b_y) \times \frac{(Se^{2X} + b_x)^{n+m}}{(n+m)!} \frac{(b_y)^n}{n!},$$

$$P_r(n_x = n_y) = \sum_{n>0} \exp - (Se^{2X} + b_x + b_y) \frac{(Se^{2X} + b_x)^n (b_y)^n}{(n!)^2}.$$

$S$, $b_x$, and $b_y$ have the same meaning as in IM.

After some mathematical transformation $q$ can be expressed with the help of an integral:

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X) dX \int_0^{Se^{2X} + b_x} e^{-\theta} e^{-b_y} I_0(2\sqrt{\theta b_y}) d\theta + \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X) I_0[2\sqrt{b_y (b_x + Se^{2X})}] \exp - (Se^{2X} + b_x) dX,$$

where $I_0$ is the modified Bessel function of order zero. The double integral can be integrated by parts, introducing the function

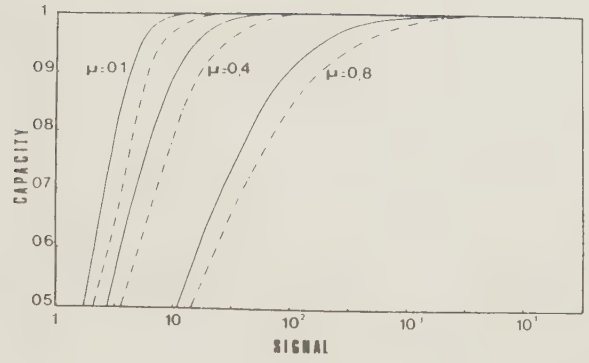



Fig. 3. Capacity vs signal per bit interval for noise $b = 0.1$: - - - IM; PCM/PL.

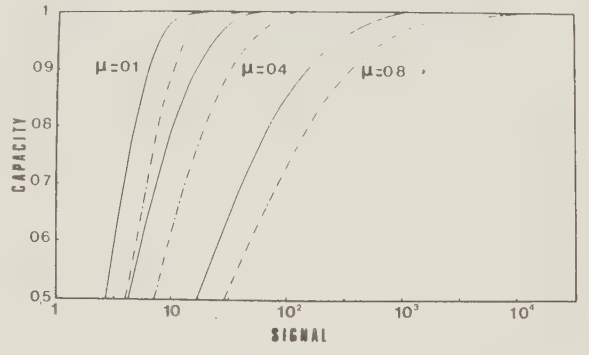



Fig. 4. Capacity vs signal per bit interval for noise $b = 1$: - - - IM; — PCM/PL.

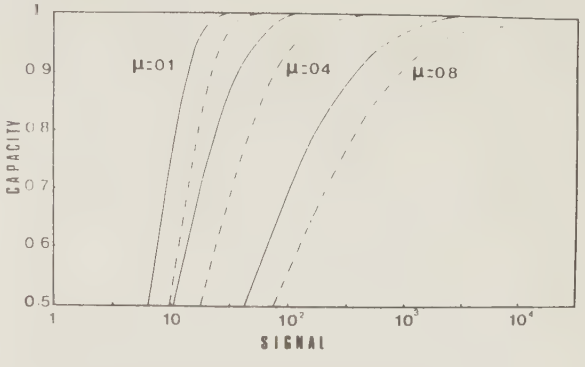



Fig. 5. Capacity vs signal per bit interval for noise $b = 10$: - - - IM; — PCM/PL.

$$R(X) = \int_0^X P(X)dX$$

$$= \frac{1}{\sigma_b}\int_{\sqrt{G_x}}^{\infty} R\left(\frac{X+\mu^2}{\mu}\right) t \exp -\left(\frac{t^2}{4b_x} + b_x\right) I_0(t)\,dt$$

$$+ \frac{1}{2\mu\sqrt{\sigma_b}}\int_{\sqrt{G_x}}^{\infty} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{X+\mu^2}{\mu}\right) I_0(t)$$

$$\times \frac{t}{t - 4b_x b_x} \exp -\left(\frac{t^2}{4b_x} + b_x\right) dt.$$

We calculated the probability $q$ and the capacity $C$ for the case $b_x = b_y = b$, using a UNIVAC 1110 computer.

## Conclusion

The results are plotted on Figs. 3–5. We give the capacity as a function of signal for different values of $b$. We have investigated different values of the variance $\mu^2$ of log-amplitude fluctuations which are of practical interest. We conclude that the capacity of the link in a PCM/PL modulation is larger than an IM for a given rate of information. When used in the IM on–off modulation mode the optical link transmission requires more power than when used in the PCM/PL mode. On Figs. 6–8 we plotted the increase of the power as a function of the capacity; they show the advantage of the PCM/PL modulation.

With intensity modulation, the capacity is obtained when the probability $Q$ equals $Q_{max}$, an optimum value which depends on the strength of turbulence, the intensity of the signal, and the value $k$ of the adaptive threshold, whereas the PCM/PL requires no adaptive threshold and always reaches its capacity when the probability $Q$ of an emitted digit is $\frac{1}{2}$. These are the practical advantages of the PL method.

The main disadvantage is that the detection process requires two detectors; thus it is necessary to balance and calibrate them. It must be noticed that in these calculations we assumed the analyzers to be perfect, i.e., the noise is independent of the signal. Moreover we neglected the depolarization.

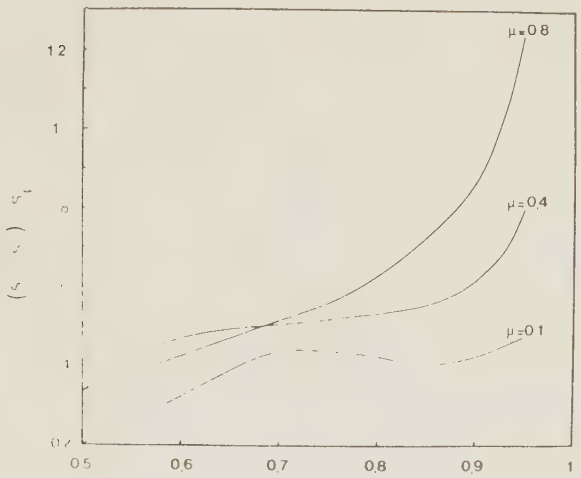



Fig. 6. Increase of signal vs capacity for noise $b = 0.1$: $S_a$, number of signal photoelectrons for IM; $S_p$, number of signal photoelectrons for PCM/PL.

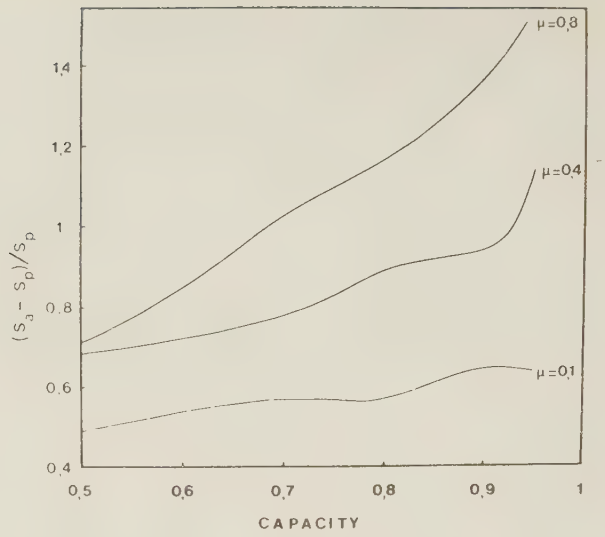



Fig. 7. Increase of signal vs capacity for noise $b = 1$: $S_a$, number of signal photoelectrons for IM; $S_p$, number of signal photoelectrons for PCM/PL.

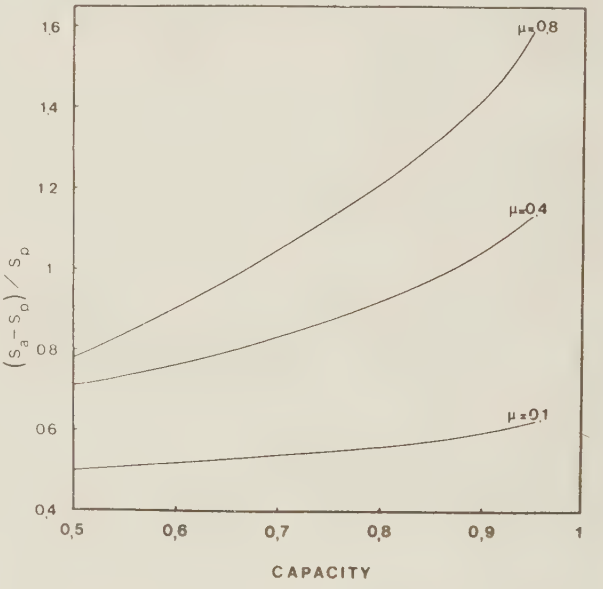



Fig. 8. Increase of signal vs capacity for noise $b = 10$: $S_a$, number of signal photoelectrons for IM; $S_p$, number of signal photoelectrons for PCM/PL.

The authors thank with gratitude F. Teissier du Cros and D. de Brucq for helpful discussions. This work was supported by Cethedec.

## References

1. W. E. Webb and J. T. Marmo, Jr. Appl. Opt. 14, 1113 (1975).
2. J. N. Bradford and J. W. Turner, Appl. Opt. 8, 645 (1969).
3. P. H. Hohn, Appl. Opt. 8, 367 (1969).
4. M. Tycz, M. W. Fitzmaurice, and D. A. Premo, IEEE Trans. Commun. **COM-14**, 1069 (1973).
5. A. Feinstein, Trans. IRE, Professional Group on Information Theory 2 (Sept. 1954).
6. W. N. Peters and R. J. Arguello, IEEE J. Quantum Electron. **QE-3**, 532 (1967).
7. B. Lamouroux and B. Prade, Rev. CETHEDEC, 12ème année, 2ème trimestre no. 43, 71 (1975).
8. D. L. Fried, Appl. Opt. 4, 79 (1965).
9. V. I. Tatarski, *Wave Propagation in a Turbulent Medium* (McGraw Hill, New York, 1961).
10. M. E. Gracheva and A. S. Gurvich, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz. 13, 50 (January 1970).

# ANNEXE II

## 1°- MATRICES DE JONES ET DE MUELLER D'UN BIREFRINGENT LINEAIRE

D'après les propriétés des équations de Maxwell, la matrice de Jones [7] peut se mettre sous la forme suivante :

$\hat{J} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ de plus le milieu étant supposé non absorbant $\alpha$ et $\beta$ ne sont pas indépendants : $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$

La relation (0) s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_z \end{pmatrix}$$

Les vecteurs de Stokes incident et émergent s'écrivent de la manière suivante :

$$I' = < E'_x E'^*_x > + < E'_z E'^*_z > \qquad I = < E_x E^*_x > + < E_z E^*_z >$$

$$M' = < E'_x E'^*_x > - < E'_z E'^*_z > \qquad M = < E_x E^*_x > - < E_z E^*_z >$$

$$C' = < E'_x E'^*_z > + < E'^*_x E'_z > \qquad C = < E_x E^*_z > + < E^*_x E_z >$$

$$S' = i(< E'_x E'^*_z > - < E'^*_x E'_z >) \qquad S = i\,(< E_x E^*_z > - < E^*_x E_z >)$$

On en déduit facilement :

$$I' = M_{11}\ I + M_{12}\ M + M_{13}\ C + M_{14}\ S$$

$$M' = M_{21}\ I + M_{22}\ M + M_{23}\ C + M_{24}\ S$$

$$C' = M_{31}\ I + M_{32}\ M + M_{33}\ C + M_{34}\ S$$

$$S' = M_{41}\ I + M_{42}\ M + M_{43}\ C + M_{44}\ S$$

$$I' = <E_x E^*_x>(M_{11}+M_{12}) + <E_z E^*_z>(M_{11}-M_{12}) + <E_x E^*_z>(M_{13}+iM_{14}) + <E^*_x E_z>(M_{13}-iM_{14})$$

d'autre part :

$$I' = <(\alpha E_x + \beta E_z)(\alpha^* E^*_x + \beta^* E^*_z)> + <(-\beta^* E_x + \alpha^* E_z)(-\beta E^*_x + \alpha E^*_z)>$$

en développant :

$$I' = <\alpha\alpha^* E_x E_x^* + \beta\beta^* E_z E_z^* + \alpha\beta^* E_x E_z^* + \beta\alpha^* E_z E_x^*>$$
$$+ <\beta\beta^* E_x E_x^* + \alpha\alpha^* E_z E_z^* - \alpha\beta^* E_x E_z^* - \beta\alpha^* E_z E_x^*>$$

d'après les propriétés des moyennes que les variables soient dépendantes ou indépendantes :

$$I' = (\alpha\alpha^* + \beta\beta^*)<E_x E_x^*> + (\alpha\alpha^* + \beta\beta^*)<E_z E_z^*>$$

en identifiant :

$$M_{11} = \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1 \qquad M_{12} = 0 \qquad M_{13} = 0 \qquad M_{14} = 0$$

pour :

$$M' = (\alpha\alpha^* - \beta\beta^*) <E_x E_x^*> + (\beta\beta^* - \alpha\alpha^*) <E_z E_z^*> + 2\alpha\beta^* <E_x E_z^*> + 2\beta\alpha^* <E_z E_x^*>$$

par analogie :

$$M' = (M_{21}+M_{22}) <E_x E_x^*> + (M_{21}-M_{22}) <E_z E_z^*> + <E_x E_z^*> (M_{23}+iM_{24}) + <E_x^* E_z> (M_{23}-iM_{24})$$

en identifiant :

$$M_{21}+M_{22} = \alpha\alpha^* - \beta\beta^* \qquad M_{21}-M_{22} = \beta\beta^* - \alpha\alpha^* \Longrightarrow M_{21} = 0$$
$$M_{22} = \alpha\alpha^* - \beta\beta^*$$

et de même :

$$M_{23} = (\alpha\beta^* + \beta\alpha^*) \qquad M_{24} = -i(\alpha\beta^* - \beta\alpha^*)$$

- pour C

$$<(\alpha E_x + \beta E_z)(-\beta^* E_x + \alpha^* E_z)^*> + <(\alpha E_x + \beta E_z)^* (-\beta^* E_x + \alpha^* E_z)> =$$
$$-\alpha\beta <E_x E_x^*> + \beta\alpha <E_z E_z^*> + \alpha^2 <E_x E_z^*> - \beta^2 <E_z E_x^*> - \alpha^*\beta^* <E_x E_x^*>$$
$$+ \beta^*\alpha^* <E_z^* E_z> + \alpha^{*2} <E_x^* E_z> - \beta^{*2} <E_z^* E_x> =$$
$$<E_x E_x^*>(M_{31}+M_{32}) + <E_z E_z^*>(M_{31}-M_{32}) + <E_x E_z^*>(M_{33}+iM_{34}) +$$
$$<E_x^* E_z>(M_{33}-iM_{34})$$

d'où : $M_{31}+M_{32} = -\alpha\beta - \alpha^*\beta^*$ ; $M_{31}-M_{32} = \beta\alpha + \beta^*\alpha^*$

$$M_{33}+iM_{34} = \alpha^2 - \beta^{*2} \quad ; \quad M_{33}-iM_{34} = -\beta^2 + \alpha^{*2}.$$

$$\Longrightarrow M_{31} = 0 \quad ; \quad M_{32} = -(\alpha\beta + \alpha^*\beta^*) \; ; \; M_{33} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2} - \beta^2 - \beta^{*2})$$

$$M_{34} = -\frac{i}{2}(\alpha^2 - \alpha^{*2} + \beta^2 - \beta^{*2})$$

- pour S

$$i\left\{<(\alpha E_x+\beta E_3)(-\beta^* E_x+\alpha^* E_3)^*>-<(\alpha E_x+\beta E_3)^*(-\beta^* E_x+\alpha^* E_3)>\right\}=$$

$$i\left\{-\alpha\beta<E_x E_x^*>+\beta\alpha<E_3 E_3^*>+\alpha^2<E_x E_3^*>-\beta^2<E_3 E_x^*>-\alpha^{*2}<E_x^* E_3>\right.$$

$$\left.\alpha^*\beta^*<E_x^* E_x>+\beta^{2*}<E_3^* E_x>-\beta^*\alpha^*<E_3 E_3^*>\right\}=$$

$$<E_x E_x^*>(M_{41}+M_{42})+<E_3 E_3^*>(M_{41}-M_{42})+<E_x E_3^*>(M_{43}+iM_{44})+$$

$$<E_x^* E_3>(M_{43}-iM_{44}) \quad \Longrightarrow$$

$$M_{41}+M_{42}=i(-\alpha\beta+\alpha^*\beta^*)\;;\; M_{41}-M_{42}=i(\beta\alpha-\beta^*\alpha^*)\;;\; M_{43}+iM_{44}=i\alpha^2+i$$

$$M_{43}-iM_{44}=i(-\beta^{*2}-\alpha^{*2}) \quad \Longrightarrow \quad M_{41}=0\;;\; M_{42}=i(\alpha^*\beta^*-\alpha\beta$$

$$M_{43}=\frac{i}{2}(\alpha^2-\alpha^{2*}-\beta^2+\beta^{*2}\;;\; M_{44}=\frac{1}{2}(\alpha^2+\alpha^{2*}+\beta^2+\beta^{*2})$$

Dans le cas d'un <u>biréfringent linéaire</u> :

Si $\delta$ représente le retard introduit par le biréfringent
et $\theta$ l'azimuth de l'axe rapide par rapport à la direction de référence

Si : $\hat{R}(\theta)$ est la matrice de rotation (2x2) d'un angle $\theta$

$\hat{R}(-\theta)$ est la matrice de rotation (2x2) d'un angle $-\theta$

$\hat{J}(0)$ est la matrice de Jones du biréfringent non absorbant par rapport à ses axes principaux.

$$\hat{J}(0)=\begin{pmatrix} e^{i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta/2} \end{pmatrix} \qquad \hat{R}(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La matrice de Jones $\hat{J}(L)$ du biréfringent linéaire est [10]

$$\hat{J}(L)=\hat{R}(-\theta)\,\hat{J}(0)\,\hat{R}(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\frac{\delta}{2}+i\cos 2\theta\sin\frac{\delta}{2} & i\sin 2\theta\sin\frac{\delta}{2} \\ i\sin 2\theta\sin\frac{\delta}{2} & \cos\frac{\delta}{2}-i\cos 2\theta\sin\frac{\delta}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de Mueller de ce biréfringent linéaire est donc :

$$\hat{M}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\delta/2 + \sin^2\delta/2\cos 4\theta & \sin^2\delta/2 \sin 4\theta & -\sin 2\theta \sin\delta \\ 0 & \sin 4\theta \sin^2\delta/2 & \cos^2\delta/2 - \sin^2\delta/2\cos 4\theta & \cos 2\theta \sin\delta \\ 0 & \sin 2\theta \sin\delta & -\cos 2\theta \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture on a l'habitude de poser :

$\alpha = G + i\,D$ et $\beta = F + i\,E$ avec $D = M \sin\delta/2$
$E = C \sin\delta/2$
$F = S \sin\delta/2$
$G = \cos\delta/2$

M , C et S étant les 2ième, 3ième et 4ième paramètre de Stokes du vecteur propre de l'axe rapide du biréfringent.

Dans le cas d'un biréfringent linéaire :

$M = \cos 2\theta \qquad C = \sin 2\theta \qquad S = 0$

2°- MATRICE DE JONES ET DE MUELLER D'UN BIREFRINGENT NON LINEAIRE

Dans le cas d'un biréfringent non linéaire, le vecteur champ électrique, qui est toujours transversal, Oy restant la direction de propagation, a deux composantes :

$E'_x = A_x\, e^{i\phi x}$

$E'_z = A_z\, e^{i\phi z}$ en notation complexe

Si on pose $R = \text{Arctg}\ \frac{A_z}{A_x}$ et $\gamma = \phi_z - \phi_x$

la matrice de Jones d'un biréfringent non linéaire s'écrira :

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \cos\delta/2 + i\cos 2R \sin\delta/2 & ie^{-i\gamma} \sin 2R \sin\delta/2 \\ ie^{i\gamma} \sin 2R \sin\delta/2 & \cos\delta/2 - i\cos 2R \sin\delta/2 \end{pmatrix}$$

le terme en $e^{i\gamma}$ représentant, pour un vecteur propre donné, le déphasage entre ses deux composantes.

Les paramètres de Stokes du vecteur propre de l'axe rapide du biréfringent sont, cette fois-ci :

$M = \cos 2R$
$C = \sin 2R \cos\gamma$
$S = \sin 2R \sin\gamma$

on peut aussi les exprimer en fonction de $\theta$ et $\alpha$ :

$M = \cos 2\alpha \cos 2\theta$
$C = \cos 2\alpha \sin 2\theta$
$S = \sin 2\alpha$

en conservant les notations : $D = M \sin \delta/2$
$E = C \sin \delta/2$
$F = S \sin \delta/2$
$G = \cos \delta/2$

Les coefficients de la matrice $\hat{M}$ peuvent se mettre sous la forme suivante :

$M_{11} = 1$

$M_{21} = M_{31} = M_{41} = M_{12} = M_{13} = M_{14} = 0$

$M_{22} = (G+iD)(G-iD) - (F+iE)(F-iE) = G^2 + D^2 - F^2 - E^2$

$M_{23} = (G+iD)(F-iE) + (F+iE)(G-iD) = 2(GF + ED)$

$M_{24} = -i[(G+iD)(F-iE) - (F+iE)(G-iD)] = -2i(iDF-iEG) = 2(DF-EG)$

$M_{32} = -(G+iD)(F+iE) - (G-iD)(F-iE) = -2(GF-DE)$

$M_{33} = G^2 - D^2 - F^2 + E^2$

$M_{34} = 2(GD + EF)$

$M_{42} = i(-2iDF - 2iEG) = 2(DF + EG)$

$M_{43} = -2(DG - EF)$

$M_{44} = G^2 + F^2 - D^2 - E^2$

On constate que la matrice $\hat{M}$ ainsi trouvée est une matrice de rotation d'un angle $\delta$ autour d'un vecteur dont les composantes sont : $(\cos 2\theta \cos 2\alpha , \sin 2\theta \cos 2\alpha , \sin 2\alpha)$

La matrice de Mueller dont les termes sont calculés ci-dessus est telle que la somme des carrés des éléments d'une même ligne ou d'une même colonne est égale à l'unité ce qui n'est pas le cas pour la matrice indiquée par W.A. Shurcliff [10] qui est donc erronée.

### 3°- MATRICE DE JONES D'UN MILIEU PRESENTANT DU DICHROISME LINEAIRE ET DE LA BIREFRINGENCE LINEAIRE DONT LES AXES CONFONDUS SONT A 45° DES AXES $\vec{Ox}$ et $\vec{Oz}$

La matrice de Jones d'un dichroïque [10] rapporté à ses axes principaux est la suivante :

$$\hat{J}_D\,(0) = \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix}$$

après une rotation des axes de 45°, elle devient :

$$\hat{J}_D\,(45) = \begin{pmatrix} p_2 + p_1 & p_2 - p_1 \\ p_2 - p_1 & p_2 + p_1 \end{pmatrix}$$

La matrice de Jones d'un biréfringent linéaire dans le cas particulier où $\theta = 45°$, prend la forme :

$$\hat{J}_B\,(45) = \begin{pmatrix} \cos \delta/2 & i \sin \delta/2 \\ i \sin \delta/2 & \cos \delta/2 \end{pmatrix}$$

et la matrice de Jones du milieu présentant du dichroïsme et de la biréfringence linéaires, dont les axes sont à 45° des directions $\vec{Ox}$ et $\vec{Oz}$ est :

$$\hat{J}_T\,(45) = \hat{J}_D\,(45) \times \hat{J}_B\,(45)$$

$$\hat{J}_T\,(45) = \begin{pmatrix} (p_2 + p_1)\cos \delta/2 + i(p_2 - p_1)\sin \delta/2 & i(p_2 + p_1)\sin \delta/2 + (p_2 - p_1)\cos \delta/2 \\ i(p_2 + p_1)\sin \delta/2 + (p_2 - p_1)\cos \delta/2 & (p_2 + p_1)\cos \delta/2 + i(p_2 - p_1)\sin \delta/2 \end{pmatrix}$$

C'est à dire :

$$\hat{J}_T\,(45) = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_1 \end{pmatrix}$$

les termes $J_1$ et $J_2$ étant des nombres complexes.

# ANNEXE III

La diffusion de la lumière dans le liquide d'étude ("milling yellow" dilué dans de l'eau, concentration $\simeq 1\%$) peut avoir de nombreuses causes.

La matrice de Mueller [29] de l'eau de mer et de l'eau de rivière a été mesurée pour différents angles de diffusion et la polarisation de l'onde diffusée (exceptée pour l'onde rétrodiffusée) est comparable à celle due à des diffuseurs Rayleigh.
En outre, plus l'eau est "propre", plus l'on se rapproche d'une diffusion Rayleigh.
Les ordres de grandeur des diffusions dues aux fluctuations thermiques, aux fluctuations de vitesse, à la diffusion Rayleigh dans l'eau pure sont donc calculés, ils restent très faibles et la diffusion principale est due à la présence du "milling yellow" lui-même.
Pindera et Krishnamurthy [58] ont étudié le comportement, de la lumière diffusée par les solutions de "milling yellow", au point de vue polarisation. Leur conclusion est qu'en première approximation, pour certaines valeurs de $\varphi$ , le processus de diffusion peut être assimilé à un processus de diffusion Rayleigh.

## 1°- ORDRE DE GRANDEUR DES INTENSITES DIFFUSEES.

Etant donné que l'on s'intéresse uniquement aux ordres de grandeurs, on se place dans le cas de la diffusion latérale à 90° avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = 0$.

### a) Diffusion due à la biréfringence d'écoulement

L'intensité, première composante du vecteur de Stokes, obéit alors à l'équation suivante :

$$I = \frac{\eta^2 \, k^2 \, ( 1 - \cos k \mathcal{R} ) \, V \, \mathcal{R}}{(4 \pi R)^2} \qquad (I_o + M_o)$$

pour un gradient de vitesse de quelques secondes $^{-1}$,
$\eta$ vaut qq $10^{-8}$.

pour un volume diffusant de $1mm^3$

$$I \simeq \frac{k^2}{(4 \pi R)^2} V 10^{-19}$$

b) Diffusion due aux fluctuations thermiques

L'intensité a alors pour valeur

$$I = \frac{2k^4 V}{(4 \pi R)^2} \times \frac{8 \pi \langle v^2 \rangle l^3}{[1 + k^2 l^2/2]} (I_o + M_o)$$

au maximum, l'intensité vaut

$$I_{max} = \frac{k^2 V}{(4 \pi R)^2} \times 5\ 10^{-10} \qquad \text{avec} \quad \langle v^2 \rangle = 10^{-8}$$

et $l \simeq 1$ mm

c) Diffusion Rayleigh due à l'eau liquide

On peut caractériser l'intensité de la lumière diffusée [30] par le rapport Rayleigh qui vaut, à 90°

$$R = R^2 N I_u$$

N étant le nombre de particules diffusantes par unité de volume
$I_u$ l'intensité diffusée par particule, pour une intensité incidente unitaire.
Pour l'eau, pour la longueur d'onde de 0,546 $\mu$m

$$R = 0{,}865\ 10^{-6}\ cm^{-1}$$

Si l'on veut pouvoir faire des comparaisons avec les valeurs ci-dessus, il faut exprimer

$$I = \frac{0{,}865\ 10^{-6} \times 16 \pi^2 \times k^4 V}{(4 \pi R)^2 \times 68\ 10^{16}} = \frac{k^2 V}{(4 \pi R)^2} \times 2\ 10^{-8}$$

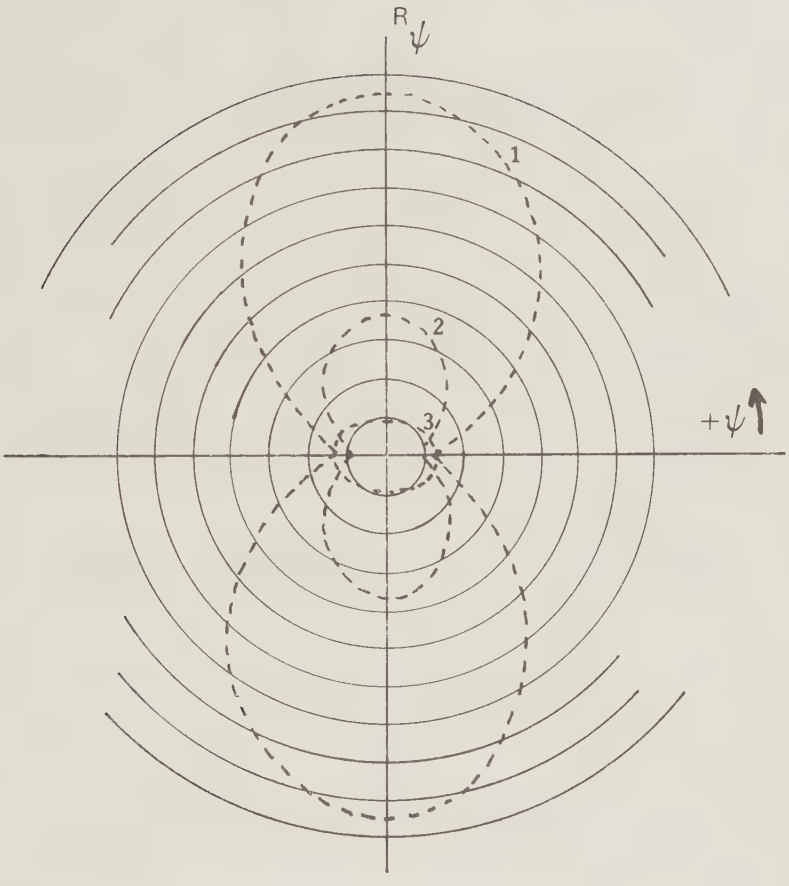



Fig n° $III_1$ : Variation de $R_\psi$ en fonction de $\psi$ pour une solution de milling yellow ( concentration 1.5% ) d'après Pindera et Krishnamurthy (58)

$\theta = 90°$ $\lambda = 6328$ Å $T = 22°$ C

La courbe n° 1 correspond à $\phi = 90°$

" 2 " $\phi = 45°$

" 3 " $\phi = 0°$

## 2°- RESULTATS EXPERIMENTAUX OBTENUS PAR PINDERA ET KRISHNAMURTHY

La figure n° III.1 résume les mesures réalisées par les auteurs cités ci-dessus dans une configuration proche de celle que nous avons utilisée. La solution de "milling yellow" étudiée a une concentration de 1,5%, la température est de 22°C. La lumière incidente est émise par un laser He-Ne ( $\lambda$ = 6328 Å) et polarisée linéairement.

$\Psi$ est l'angle dans le plan normal à la direction de l'observation entre le plan d'observation et l'axe de l'analyseur.

$\phi$ est l'angle azimuthal du faisceau incident polarisé linéairement (c'est le complément de l'angle $\varphi$ défini au cours de nos calculs de diffusion)

$R\Psi$ est proportionnel au rapport de l'intensité diffusée, (polarisée dans la direction $\Psi$ ) à l'intensité du faisceau incident.

On voit sur cette figure qu'il existe des différences avec une diffusion de Rayleigh ; par exemple pour $\theta = 90°$ et $\phi = 0°$ ; $R\Psi$ doit être nul quelque soit $\Psi$ dans le cas d'une diffusion Rayleigh.

Cependant, en première approximation, pour un angle $\Psi$ proche de 90° l'écart entre la lumière réellement diffusée et la lumière Rayleigh peut être considéré comme un bruit qui reste toujours inférieur à 20% du signal principal.

# BIBLIOGRAPHIE


[ 1] D.L. FRIED J.O.S.A. 57, 169 (1967).

[ 2] VI.I. TATARSKII "The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation" Ed. Keter Press, Jerusalem 1971.

[ 3] J.N. BRADFORD, J.W. TUCKER Applied Optics 8, 645 (1969).

[ 4] D.H. HOHN Applied Optics 8, 367 (1969)

[ 5] G.R. BOYER, B.S.PRADE Surface science 56, 449 (1976).

[ 6] G.G. STOKES Trans. Cambridge Phil. Soc. 9, 399 (1852).

[ 7] R.C. JONES J.O.S.A. 37, 107 (1947).

[ 8] M. BORN, E. WOLF. "Principles of optics". Pergamon Press (1965).

[ 9] H. MUELLER J.O.S.A. 38, 661 (1948).

[10] W.A. SHURCLIFF "Polarized Light". Oxford University press (1962).

[11] S. HESS Communication privée au Laboratoire d'Optique Appliquée (Ecole Polytechnique) le 31 Octobre 1974.

[12] J.C. MAXWELL Proc. R. Soc. Lond. 22, 46 (1873).

[13] H. SENFTLEBEN Physik Z. 31, 822, 961 (1930).

[14] J.J.M. BEENAKKER, G. SCOLES, H.F.P. KNAAP, R.M. JONKMAN, Phys. letters 2, 5 (1962).

[15] H. SCHLICHTING "Boundary-Layer Theory". Mc. GRAW-HILL (1968).

[16] L. WALDMANN Z. NATURFORSCH. 12a, 660 (1957).

[17] L. WALDMANN Z. NATURFORSCH. 13a, 609 (1958).

[18] R.F. SNIDER J. Chem. Phys. 32, 1051 (1960).

[19] F. BASS Phys. Lett. A 36, 107 (1971).

[19bis] C.J. GORTER Naturwiss 26 (1938) 140

[20] L. LANDAU, E.LIFSCHITZ "Electrodynamique des milieux continus". Pergamon Press (New-York 1960).

[21] G.R. BOYER, B.F. LAMOUROUX, B.S. PRADE J.O.S.A 65, 1319 (1975)

[22] P. MORSE, H. FESHBACH "Methods of theoretical physics" Mc. GRAW-HILL (1968).

[23] A.J. ROBERT in SESA 1965, International Conference on Experimental Mechanics, vol.1. (SESA, Washington, 1965) pp.123-131

[24] R. COURANT, D. HILBERT "Methods of mathematical physics". Interscience publishers (1962).

[25] G.R. BOYER, B.F. LAMOUROUX, B.S. PRADE, J.Y. VINET Optical Engeneering 20, 44, (1981).

[26] H.G. BERRY, G. GABRIELSE, A.E. LIVINGSTONE, Appl. Opt. 16, 3200 (1977).

[27] J.C. KEMP J.O.S.A 59, 8 (1969).

[28] G.R. BOYER, B.F. LAMOUROUX, B.S. PRADE, Appl. Opt. 18, 1217 (1979).

[29] G.F. BEARDSLEY J.O.S.A 58, 52 (1968).

[30] M. KERKER "The scattering of light". Academic Press (1969).

[31] H.G. JERRARD Chemical Review, 59, 345 (1959).

[32] M.E. MACH "Optisch. Akustische Versuche". Calve, Prague (1873).

[33] A. KUNDT. Pogg. Ann 153, 10 (1874).

[34] C.V. RAMAN, K.S. KRISHNAN Phil. Mag. 5, 769 (1928).

[35] W. HALLER Kolloïd Z 61, 26 (1932).

[36] P. BOEDER Z. Physik 75, 258 (1932).

[37] W. KUHN Z. Physik, Chem. 161A, 1, 427 (1932).

[38] C. SADRON J. Phys. radium 8, 481 (1937).

[39] G.B. JEFFERY Proc. Roy. Soc. (London) A 102, 161 (1922).

[40] A. PETERLIN, H. STUART Z Physik 112, 1, 129 (1939).

[41] O. SNELLMAN, Y. BJORNSTAHL Kolloïd-Beih 52, 403 (1941).

[42] G. MIE Ann. Physick 25, 377 (1908).

[43] H.A. SCHERAGA, J.T. EDSALL, J.O. GADD J. Chem Phys 19, 1101 (1951).

[44] P. RANDRIA Thèse de 3ième cycle (1977).

[45] J.J. HERMANS Kolloïd Z 106, 95 (1944).

[46] S. NIKITINE CRAS 22 Mars 1937.

[47] S. NIKITINE CRAS 12 Juillet 1937.

[48] T. KONDO Zs. Wiss, Photogra. 31, 153 (1932).

[49] G.I. TAYLOR Proc. Roy. Soc. A 151, 494 (1935).

[50] S. CHANDRASEKHAR "Hydrodynamic and Hydromagnetic stability", Oxford University Press. London (1961).

[51] A. DAVEY J. Fluid Mech 14, 336 (1962).

[52] M. GORMAN, H. SWINNEY, D. RAND Physical Review letters 46, n°15, 992 (1981).

[53] H. WAYLAND J. of Applied Physics 26, 1197 (1955).

[54] W.J. AFEE, H. PIH Experimental Mechanics 14, n°10 (1974).

[55] J.J. BARRAU, C. TRUCHASSON Rheologica Acta 13, 333 (1974).

[56] M.F. JIBAWI Thèse de 3ème cycle (1975).

[57] J.T. PINDERA, A.R. KRISHNAMURTHY Experimental Mechanics Janvier 1978 p.1 - Février 1978 p.41.

[58] J.T. PINDERA, A.R. KRISHNAMURTHY Transactions de la SCGM 3,95 (1975).

[59] J.W. PRADOS, F.N. PEEBLES AIchE Journal 5, 225 (1959).

[60] F.N. PEEBLES, J.W. PRADOS, E.H. HONEYCUTT Journal of Polymer Science. Part C p.37.

[61] H.E. HIRSCH Doctoral Dissertation. The univ. of Tennessee, Knoxville (1964).

[62] DONNELLY Phys. Rev. Letters 44, 987, (14 Avril 1980).

[63] S. HESS Z. NATURFORSCH. 24 a, 1675 ( 1969 )

[64] S. HESS SPRINGER TRACTS MOD. PHYS. 54, 136 ( 1970 )

[65] S. HESS,L. WALDMANN, Z. NATURFORSCH. 21 a, 1529 ( 1966 )

[66] S. HESS,W. KOHLER, Z. NATURFORSCH. 23 a, 1903 ( 1968 )

[67] S. HESS ACTA PHYSICA AUSTRIACAE X, 247 ( 1973 ).